Математическая логика

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы $\to$ Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 32

Гильбертовское исчисление предикатов
Теорема Гёделя о полноте (формулировка)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, весенний семестр

Вступление

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash A \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \cup \Delta \vdash A}$$

$$R_{\&}^{+}\colon \frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\&\, B} \qquad R_{\&}^{-1}\colon \frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash A} \qquad R_{\&}^{-2}\colon \frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash B}$$

$$R_{\vee}^{+1}\colon \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad R_{\vee}^{+2}\colon \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

$$R_{\vee}^{-}\colon \frac{\Gamma \vdash A \vee B,\ \Gamma \cup \{A\} \vdash C,\ \Gamma \cup \{B\} \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

$$R_{\rightarrow}^{+}\colon \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \qquad R_{\rightarrow}^{-}\colon \frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B}$$

$$R_{\neg}^{+}\colon \frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B,\ \Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \qquad R_{\neg}^{-}\colon \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

$$R_{\forall}^{-}\colon \frac{\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}\ A}{\Gamma \vdash A\{\mathrm{x}/t\}} \qquad R_{\forall}^{+}\colon \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall \mathrm{x}\ A}$$

$$R_{\exists}^{+}\colon \frac{\Gamma \vdash A\{\mathrm{x}/t\}}{\Gamma \vdash \exists \mathrm{x}\ A} \qquad R_{\exists}^{-}\colon \frac{\Gamma \vdash \exists \mathrm{x}\ A,\ \Gamma \cup \{A\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

А достаточно ли этих правил и аксиом для построения доказательств для **всевозможных** секвенций $\vdash \varphi$ с общезначимыми формулами φ?

Вступление

В теореме о полноте натурального исчисления высказываний существенно использовался тот факт, что для любой формулы можно *обоснованно* построить **конечную** таблицу значений, перебрав **конечное** множество всех интерпретаций

Для формул логики предикатов
такой «трюк» применить невозможно

Обоснование полноты исчислений предикатов — трудоёмкая задача, и существенная часть обоснования в лекциях будет опущена

Попробуем обосновать полноту НИП так:

- Рассмотрим более «удобное» полное исчисление предикатов
- Покажем, что любое доказательство общезначимости формулы в рассмотренном исчислении можно перестроить в доказательство общезначимости той же формулы в НИП

Вступление

Устроим новое исчисление так:

- Формулами исчисления объявим «обычные» логические формулы
- Включим в исчисление как можно меньше правил как можно более простого вида
- Включим в исчисление как можно меньше аксиом как можно более простого вида, но так, чтобы из-за слишком малого числа аксиом не возросло общее число правил

Исчисление, устроенное так, принято называть

исчислением гильбертовского типа,

или, более коротко,

гильбертовским исчислением

Далее рассматривается гильбертовское исчисление предикатов (ГИП)

ГИП: правила вывода

Включим в ГИП два правила:

1. Правило отделения (modus ponens):

$$R_{mp}\colon\ \frac{A, A \to B}{B}$$

2. Правило обобщения:

$$R_g\colon\ \frac{A}{\forall \mathrm{x}\ A}$$

Это упрощённые варианты одноимённых правил НИП, соответствующие секвенциям с пустой левой частью (не содержащим ни одного предположения)

ГИП: аксиомы

Включим в ГИП 13 схем аксиом:

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3. $A \,\&\, B \to A$
4. $A \,\&\, B \to B$
5. $A \to (B \to A \,\&\, B)$
6. $A \to A \vee B$
7. $B \to A \vee B$
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
9. $\neg A \to (A \to B)$
10. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
11. $A \vee \neg A$
12. $\forall \mathtt{x}\ A \to A\{\mathtt{x}/t\}$
13. $A\{\mathtt{x}/t\} \to \exists \mathtt{x}\ A$

Здесь используются параметры A, B, C (формулы), $\mathtt{x}$ (переменная) и t (терм, такой что подстановка $\{\mathtt{x}/t\}$ правильна для A)

ГИП: аксиомы

Пояснение схем аксиом:

$$A \to (B \to A)$$

Если A верно, то оно следует из чего угодно

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

Если в предположении о верности A из B следует C,
и если, кроме того, из A следует B, то из A следует C (*введение* $\to$)

$$A \,\&\, B \to A \qquad\qquad A \,\&\, B \to B$$

Из $A \,\&\, B$ следует и A, и B (*удаление* $\&$)

$$A \to (B \to A \,\&\, B)$$

Если верно A и верно B, то верно $A \,\&\, B$ (*введение* $\&$)

$$A \to A \vee B \qquad\qquad B \to A \vee B$$

Если верно A или верно B, то верно $A \vee B$ (*введение* $\vee$)

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$$

Если из A следует C и из B следует C,
то из $A \vee B$ также следует C (*разбор случаев*)

ГИП: аксиомы

Пояснение схем аксиом:

$$\neg A \to (A \to B)$$

Если A неверно, то из него следует что угодно (*приведение к абсурду*)

$$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$$

Если из A следует и B, и $\neg B$, то A неверно (*рассуждение от противного*)

$$A \vee \neg A$$

Справедлив *закон исключённого третьего*

$$\forall \mathrm{x}\ A \to A\{\mathrm{x}/t\}$$

Если A верно для всех предметов x,
то A верно и для предмета, отвечающего терму t (*переход к частному*)

$$A\{\mathrm{x}/t\} \to \exists \mathrm{x}\ A$$

Если A верно для предмета, отвечающего терму t,
то существует предмет, для которого верно A (*введение* $\exists$)

ГИП: аксиомы

Пример, показывающий, как нетривиально устроены доказательства в ГИП

Докажем ГИП общезначимость формулы $A \to A$:

$$\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}_2: & (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \\
\mathfrak{A}_1: & A \to ((A \to A) \to A) \\
R_{mp}: & (A \to (A \to A)) \to (A \to A) \\
\mathfrak{A}_1: & A \to (A \to A) \\
R_{mp}: & A \to A
\end{array}$$

Как вообще до такого додуматься?!

ГИП: аксиомы

Придумывать доказательства в ГИП намного сложнее, чем в НИП,
но по историческим причинам
ГИП обширно исследовано и его полнота широко известна

Теорема (Гёделя о полноте)
Формула логики предикатов доказуема в ГИП
в том и только том случае, если она общезначима

Доказательство. Можете попробовать самостоятельно
Внимание! Эта задача заметно труднее всех предыдущих
и оценивается соответственно

В обосновании полноты НИП
будем использовать теорему Гёделя о полноте без доказательства
для иллюстрации того, как полнота одних исчислений
может использоваться для обоснования полноты других исчислений