Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 32

Натуральное исчисление предикатов:
полнота

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Лемма о сведе́нии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Лемма о сведéнии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

По *утверждению о совмещении выводов* и *определению доказательства*, достаточно обосновать три факта:

Лемма о сведе́нии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

По *утверждению о совмещении выводов* и *определению доказательства*, достаточно обосновать три факта:

1. Для каждой аксиомы ψ ГИП
   секвенция $\vdash \psi$ доказуема НИП

Лемма о сведéнии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

По *утверждению о совмещении выводов* и *определению доказательства*, достаточно обосновать три факта:

1. Для каждой аксиомы ψ ГИП
   секвенция $\vdash \psi$ доказуема НИП

2. Если формула χ выводится из ψ_1, ψ_2 по правилу R_{mp} в ГИП,
   то секвенция $\vdash \chi$ выводима из $\{\vdash \psi_1, \vdash \psi_2\}$ в НИП

Лемма о сведе́нии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

По *утверждению о совмещении выводов* и *определению доказательства*, достаточно обосновать три факта:

1. Для каждой аксиомы ψ ГИП
   секвенция $\vdash \psi$ доказуема НИП
2. Если формула χ выводится из ψ_1, ψ_2 по правилу R_{mp} в ГИП,
   то секвенция $\vdash \chi$ выводима из $\{\vdash \psi_1, \vdash \psi_2\}$ в НИП
3. Если формула χ выводится из ψ по правилу R_g в ГИП,
   то секвенция $\vdash \chi$ выводима из $\vdash \psi$ в НИП

Лемма о сведéнии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

1. Подробно докажем в НИП только аксиомы ГИП вида

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$$

(доказательства для остальных аксиом не более трудны):

Лемма о свед́ении ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

1. Подробно докажем в НИП только аксиомы ГИП вида

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$$

(доказательства для остальных аксиом не более трудны):

$$\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$$

Лемма о сведе́нии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

1. Подробно докажем в НИП только аксиомы ГИП вида

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C))$$

(доказательства для остальных аксиом не более трудны):

$$R^{+}_{\to}: \quad \dfrac{A \to C \vdash (B \to C) \to (A \lor B \to C)}{\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C))}$$

Лемма о сведéнии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

1. Подробно докажем в НИП только аксиомы ГИП вида

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C))$$

(доказательства для остальных аксиом не более трудны):

$$\begin{array}{ll}
 & A \to C, B \to C \vdash A \lor B \to C \\
R^{+}_{\to}: & A \to C \vdash (B \to C) \to (A \lor B \to C) \\
R^{+}_{\to}: & \vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C))
\end{array}$$

Лемма о сведéнии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

1. Подробно докажем в НИП только аксиомы ГИП вида

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$$

(доказательства для остальных аксиом не более трудны):

$$\begin{array}{ll}
 & A \to C, B \to C, A \vee B \vdash C \\
R^{+}_{\to}: & A \to C, B \to C \vdash A \vee B \to C \\
R^{+}_{\to}: & A \to C \vdash (B \to C) \to (A \vee B \to C) \\
R^{+}_{\to}: & \vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))
\end{array}$$

Лемма о сведе́нии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

1. Подробно докажем в НИП только аксиомы ГИП вида

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$$

(доказательства для остальных аксиом не более трудны):

$$\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B \vdash A \vee B \\
 & \\
 & A \to C, B \to C, A \vee B, A \vdash C \\
 & \\
 & A \to C, B \to C, A \vee B, B \vdash C \\
R_{\vee}^{-}: & A \to C, B \to C, A \vee B \vdash C \\
R_{\to}^{+}: & A \to C, B \to C \vdash A \vee B \to C \\
R_{\to}^{+}: & A \to C \vdash (B \to C) \to (A \vee B \to C) \\
R_{\to}^{+}: & \vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))
\end{array}$$

Лемма о сведéнии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

1. Подробно докажем в НИП только аксиомы ГИП вида

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$$

(доказательства для остальных аксиом не более трудны):

$$\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B \vdash A \vee B \\
\\
 & A \to C, B \to C, A \vee B, A \vdash C \\
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B, B \vdash B \\
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B, B \vdash B \to C \\
R^{-}_{\to}: & A \to C, B \to C, A \vee B, B \vdash C \\
R^{-}_{\vee}: & A \to C, B \to C, A \vee B \vdash C \\
R^{+}_{\to}: & A \to C, B \to C \vdash A \vee B \to C \\
R^{+}_{\to}: & A \to C \vdash (B \to C) \to (A \vee B \to C) \\
R^{+}_{\to}: & \vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))
\end{array}$$

Лемма о свед**е́**нии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП, то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

1. Подробно докажем в НИП только аксиомы ГИП вида

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$$

(доказательства для остальных аксиом не более трудны):

$$\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B \vdash A \vee B \\
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B, A \vdash A \\
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B, A \vdash A \to C \\
R^{-}_{\to}: & A \to C, B \to C, A \vee B, A \vdash C \\
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B, B \vdash B \\
\mathfrak{A}: & A \to C, B \to C, A \vee B, B \vdash B \to C \\
R^{-}_{\to}: & A \to C, B \to C, A \vee B, B \vdash C \\
R^{-}_{\vee}: & A \to C, B \to C, A \vee B \vdash C \\
R^{+}_{\to}: & A \to C, B \to C \vdash A \vee B \to C \\
R^{+}_{\to}: & A \to C \vdash (B \to C) \to (A \vee B \to C) \\
R^{+}_{\to}: & \vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))
\end{array}$$

Лемма о сведéнии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

2. Положим, что формула χ выводится из ψ_1 и ψ_2 по правилу R_{mp}

Лемма о сведéнии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

2. Положим, что формула χ выводится из ψ_1 и ψ_2 по правилу R_{mp}

Тогда $\psi_2 = \psi_1 \to \chi$

Лемма о сведе́нии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

2. Положим, что формула χ выводится из ψ_1 и ψ_2 по правилу R_{mp}

Тогда $\psi_2 = \psi_1 \to \chi$,
и вывод секвенции $\vdash \chi$ из $\{\vdash \psi_1, \vdash \psi_2\}$ устроен очень просто:

$$R_{\to}^{-}: \qquad \begin{array}{l} \vdash \psi_1 \\ \vdash \psi_1 \to \chi \\ \vdash \chi \end{array}$$

Лемма о сведе́нии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

2. Положим, что формула χ выводится из ψ_1 и ψ_2 по правилу R_{mp}

Тогда $\psi_2 = \psi_1 \to \chi$,
и вывод секвенции $\vdash \chi$ из $\{\vdash \psi_1, \vdash \psi_2\}$ устроен очень просто:

$$\begin{array}{ll} & \vdash \psi_1 \\ & \vdash \psi_1 \to \chi \\ R^{-}_{\to}: & \vdash \chi \end{array}$$

3. Положим, что формула χ выводится из ψ по правилу R_g

Лемма о сведéнии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

2. Положим, что формула χ выводится из ψ_1 и ψ_2 по правилу R_{mp}

Тогда $\psi_2 = \psi_1 \to \chi$,
и вывод секвенции $\vdash \chi$ из $\{\vdash \psi_1, \vdash \psi_2\}$ устроен очень просто:

$$R^{-}_{\to}: \qquad \begin{array}{l} \vdash \psi_1 \\ \vdash \psi_1 \to \chi \\ \vdash \chi \end{array}$$

3. Положим, что формула χ выводится из ψ по правилу R_g

Тогда $\chi = \forall \mathrm{x}\ \psi$

Лемма о сведе́нии ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

2. Положим, что формула χ выводится из ψ_1 и ψ_2 по правилу R_{mp}

Тогда $\psi_2 = \psi_1 \to \chi$,
и вывод секвенции $\vdash \chi$ из $\{\vdash \psi_1, \vdash \psi_2\}$ устроен очень просто:

$$R^{-}_{\to}: \quad \begin{array}{l} \vdash \psi_1 \\ \vdash \psi_1 \to \chi \\ \vdash \chi \end{array}$$

3. Положим, что формула χ выводится из ψ по правилу R_g

Тогда $\chi = \forall \mathrm{x}\ \psi$,
и вывод секвенции $\vdash \chi$ из $\vdash \psi$ устроен очень просто:

$$R^{+}_{\forall}: \quad \begin{array}{l} \vdash \psi \\ \vdash \forall \mathrm{x}\ \psi \end{array} \quad \blacktriangledown$$

Теорема о полноте НИП

Для любой общезначимой формулы φ логики предикатов секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Теорема о полноте НИП

Для любой общезначимой формулы φ логики предикатов секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

По *теореме Гёделя о полноте*,
существует доказательство (общезначимой) формулы φ в ГИП

Теорема о полноте НИП

Для любой общезначимой формулы φ логики предикатов секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

По *теореме Гёделя о полноте*,
существует доказательство (общезначимой) формулы φ в ГИП

По *лемме о сведéнии ГИП к НИП*,
существует доказательство секвенции $\vdash \varphi$ в НИП ▼

Теорема о полноте НИП

Для любой общезначимой формулы φ логики предикатов секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

По *теореме Гёделя о полноте*,
существует доказательство (общезначимой) формулы φ в ГИП

По *лемме о сведе́нии ГИП к НИП*,
существует доказательство секвенции $\vdash \varphi$ в НИП ▼

Следствие(*проверка логического следования в НИП*)
Для любого множества предложений Γ и любого предложения φ секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема в НИП тогда и только тогда, когда верно соотношение $\Gamma \models \varphi$

Теорема о полноте НИП

Доказательство (следствия).

$\Gamma \models \varphi$

Секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема

Теорема о полноте НИП

Доказательство (следствия).

$\Gamma \models \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема компактности Мальцева*)

Существует конечное подмножество $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ множества Γ, такое что $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$

Секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема

Теорема о полноте НИП

Доказательство (следствия).

$\Gamma \models \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема компактности Мальцева*)

Существует конечное подмножество $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ множества Γ, такое что $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема о логическом следствии*)

$\models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема

Теорема о полноте НИП

Доказательство (следствия).

$\Gamma \models \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема компактности Мальцева*)

Существует конечное подмножество $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ множества Γ, такое что $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема о логическом следствии*)

$\models \psi_1 \,\&\ldots\&\, \psi_n \to \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема о равносильной замене* и *законы булевой алгебры*)

$\models \psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \varphi) \ldots))$

Секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема

Теорема о полноте НИП

Доказательство (следствия).

$\Gamma \models \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема компактности Мальцева*)

Существует конечное подмножество $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ множества Γ, такое что $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема о логическом следствии*)

$\models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема о равносильной замене* и *законы булевой алгебры*)

$\models \psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \varphi) \ldots))$

$\Rightarrow$ (*полнота исчисления*)

Секвенция $\vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \varphi) \ldots))$ доказуема

Секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема

Теорема о полноте НИП

Доказательство (следствия).

$\Gamma \models \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема компактности Мальцева*)

Существует конечное подмножество $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ множества Γ, такое что $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема о логическом следствии*)

$\models \psi_1 \,\&\ldots\&\, \psi_n \to \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема о равносильной замене* и *законы булевой алгебры*)

$\models \psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \varphi) \ldots))$

$\Rightarrow$ (*полнота исчисления*)

Секвенция $\vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \varphi) \ldots))$ доказуема

$\Rightarrow$ (*правило монотонности* и *правило отделения*)

Секвенция $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$ доказуема

Секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема

Теорема о полноте НИП

Доказательство (следствия).

$\Gamma \models \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема компактности Мальцева*)

Существует конечное подмножество $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ множества Γ, такое что $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема о логическом следствии*)

$\models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема о равносильной замене* и *законы булевой алгебры*)

$\models \psi_1 \to (\psi_2 \to (\dots \to (\psi_n \to \varphi) \dots))$

$\Rightarrow$ (*полнота исчисления*)

Секвенция $\vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to (\dots \to (\psi_n \to \varphi) \dots))$ доказуема

$\Rightarrow$ (*правило монотонности* и *правило отделения*)

Секвенция $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \vdash \varphi$ доказуема

$\Rightarrow$ (*правило монотонности*)

Секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема

Теорема о полноте НИП

Доказательство (следствия).

$\Gamma \models \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема компактности Мальцева*)

Существует конечное подмножество $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ множества Γ, такое что $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема о логическом следствии*)

$\models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

$\Rightarrow$ (*теорема о равносильной замене* и *законы булевой алгебры*)

$\models \psi_1 \to (\psi_2 \to (\dots \to (\psi_n \to \varphi) \dots))$

$\Rightarrow$ (*полнота исчисления*)

Секвенция $\vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to (\dots \to (\psi_n \to \varphi) \dots))$ доказуема

$\Rightarrow$ (*правило монотонности* и *правило отделения*)

Секвенция $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \vdash \varphi$ доказуема

$\Rightarrow$ (*правило монотонности*)

Секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема

Доказательство в обратную сторону аналогично ▼