Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 37

Аксиоматические теории первого порядка
Проблема общезначимости формул в теории

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Вступление

Теорема. $1 + 1 = 2$

Попробуем применить логику для доказательства этого утверждения

«$1 + 1 = 2$» — это **формула логики предикатов**, в которой

- 1 и 2 — константы
- $+^{(2)}$ — функциональный символ
- $=^{(2)}$ — предикатный символ

Символы 1, 2, $+$, $=$ в теореме имеют *арифметический* смысл:
чи́сла 1 и 2, операция сложения и отношение равенства чисел

Попробуем записать этот смысл, используя логическую терминологию

Вступление

Теорема. $1 + 1 = 2$

Определение. 2 — это целое число, следующее за 1

$$\mathfrak{A}_2\colon\ 2 = \mathbf{s}(1)$$

(«$\mathbf{s}(t)$» = «$(t + 1)$»)

Определение. 1 — это целое число, следующее за 0

$$\mathfrak{A}_1\colon\ 1 = \mathbf{s}(0)$$

Определение. 0 — это ... *не потребуется определять отдельно*

Остановимся на такой сигнатуре: $\langle\{0, 1, 2\}, \{\mathbf{s}^{(1)}, +^{(2)}\}, \{=^{(2)}\}\rangle$

Операцию сложения чисел из $\mathbb{N}_0$ можно определить существенно разными способами, и в том числе так:

Определение. $+$ — это двуместная операция, обладающая следующими свойствами:

$\mathfrak{A}_0^+\colon\quad \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} + 0 = \mathrm{x})$

$\mathfrak{A}_1^+\colon\quad \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (\mathrm{x} + \mathbf{s}(\mathrm{y}) = \mathbf{s}(\mathrm{x} + \mathrm{y}))$ (*т.е.* $x + (y + 1) = (x + y) + 1$)

Вступление

Теорема. $1+1=2$

Про отношение равенства чисел из $\mathbb{N}_0$ прежде всего следует знать, что это отношение эквивалентности:

$\mathfrak{A}_r^=$: $\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x}=\mathrm{x})$ (*рефлексивность*)

$\mathfrak{A}_s^=$: $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ ((\mathrm{x}=\mathrm{y}) \to (\mathrm{y}=\mathrm{x}))$ (*симметричность*)

$\mathfrak{A}_t^=$: $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ ((\mathrm{x}=\mathrm{y})\ \&\ (\mathrm{y}=\mathrm{z}) \to (\mathrm{x}=\mathrm{z}))$ (*транзитивность*)

Отношение $=$ обладает и другими важными свойствами, и среди них понадобятся такие:

$\mathfrak{A}_{\mathbf{s}}^=$: $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ ((\mathrm{x}=\mathrm{y}) \to (\mathbf{s}(\mathrm{x})=\mathbf{s}(\mathrm{y})))$

(*чи́сла, следующие за равными, равны*)

$\mathfrak{A}_+^=$: $\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{u}\ \forall \mathrm{v}\ ((\mathrm{x}=\mathrm{u})\ \&\ (\mathrm{y}=\mathrm{v}) \to (\mathrm{x}+\mathrm{y}=\mathrm{u}+\mathrm{v}))$

(*если чи́сла в сумме заменить на равные, то получится равный результат*)

Вступление

Теорема. $1+1=2$

Если принять упомянутые определения и свойства без доказательства, то обосновать теорему можно, например, так:

$$\begin{array}{lcll}
\mathfrak{A}_0^+ & \models & 1+0=1 & (\varphi_1) \\
\varphi_1, \mathfrak{A}_{\mathbf{s}}^= & \models & \mathbf{s}(1+0)=\mathbf{s}(1) & (\varphi_2) \\
\mathfrak{A}_1^+ & \models & 1+\mathbf{s}(0)=\mathbf{s}(1+0) & (\varphi_3) \\
\varphi_2, \varphi_3, \mathfrak{A}_t^= & \models & 1+\mathbf{s}(0)=\mathbf{s}(1) & (\varphi_4) \\
\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_r^=, \mathfrak{A}_+^= & \models & 1+1=1+\mathbf{s}(0) & (\varphi_5) \\
\varphi_4, \varphi_5, \mathfrak{A}_t^= & \models & 1+1=\mathbf{s}(1) & (\varphi_6) \\
\varphi_6, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_s^=, \mathfrak{A}_t^= & \models & 1+1=2 & (\varphi_7)
\end{array}$$

Следовательно, $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_0^+, \mathfrak{A}_1^+, \mathfrak{A}_r^=, \mathfrak{A}_s^=, \mathfrak{A}_t^=, \mathfrak{A}_{\mathbf{s}}^=, \mathfrak{A}_+^= \models (1+1=2)$

И как это доказывает, что один плюс один — действительно два?

Вступление

$$\sigma = \langle \{0, 1, 2\}, \{\mathbf{s}^{(1)}, +^{(2)}\}, \{=^{(2)}\} \rangle$$

$\Gamma = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_0^+, \mathfrak{A}_1^+, \mathfrak{A}_r^=, \mathfrak{A}_s^=, \mathfrak{A}_t^=, \mathfrak{A}_{\mathbf{s}}^=, \mathfrak{A}_+^=\}$ $\qquad\qquad$ $\Gamma \models (1 + 1 = 2)$

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$ сигнатуры σ:

- предметная область — $\mathbb{N}_0$
- символы 0, 1, 2, **s**, $+$, $=$ оцениваются естественным образом

Если принять без доказательства,
что для любой формулы φ из Γ верно $\mathcal{I} \models \varphi$,
то по определению логического следования будет верно и
$\mathcal{I} \models (1 + 1 = 2)$

При этом «$\mathcal{I} \models (1 + 1 = 2)$» содержательно прочитывается так:
если символы 1, 2, $+$ и $=$ имеют естественный арифметический смысл,
то формула $(1 + 1 = 2)$ действительно верна (*выполняется*)

Вступление

$$\sigma = \langle \{0, 1, 2\}, \{\mathbf{s}^{(1)}, +^{(2)}\}, \{=^{(2)}\} \rangle$$

$\Gamma = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_0^+, \mathfrak{A}_1^+, \mathfrak{A}_r^=, \mathfrak{A}_s^=, \mathfrak{A}_t^=, \mathfrak{A}_\mathbf{s}^=, \mathfrak{A}_+^=\}$ $\qquad \Gamma \models (1 + 1 = 2)$

Сигнатурой σ задана совокупность понятий,
которые допускается использовать в формулировке высказываний

Множеством Γ задан набор основных свойств понятий из σ,
не требующих доказательства
(такие свойства нередко называют **аксиомами**)

Формула $(1 + 1 = 2)$ — это высказывание,
справедливость которого *обосновывается* с использованием аксиом
(такие высказывания нередко называют **теоремами**)

Набор аксиом заданной сигнатуры,
предназначенный для формулировки и доказательства теорем,
в логике принято называть **аксиоматической теорией**

Если аксиомами и теоремами являются формулы логики предикатов
первого порядка, то такую теорию принято называть

аксиоматической теорией первого порядка

Аксиоматические теории

Выберем сигнатуру σ алфавита логики предикатов

Аксиоматическая теория первого порядка $\mathcal{T}$ сигнатуры σ — это множество предложений сигнатуры σ

Элементы (формулы) теории $\mathcal{T}$ называются аксиомами этой теории

Логические следствия теории $\mathcal{T}$ называются теоремами этой теории

Если теория ясна из контекста,
то будем *теоремы теории* называть просто *теоремами*

Аксиоматические теории

Формула φ

- общезначима в теории $\mathcal{T}$, если $\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ — теорема
  - *Другое название*: $\mathcal{T}$-общезначима
  - *Обозначение*: $\models_{\mathcal{T}} \varphi$
- невыполнима в теории $\mathcal{T}$, если формула $\neg\varphi$ $\mathcal{T}$-общезначима
  - *Другое название*: $\mathcal{T}$-невыполнима
  - *Обозначение:* $|\not\models_{\mathcal{T}} \varphi$[1]
- выполнима в теории $\mathcal{T}$, если она не является $\mathcal{T}$-невыполнимой
  - *Другое название*: $\mathcal{T}$-выполнима
  - *Обозначение*: $|\models_{\mathcal{T}} \varphi$[1]
- необщезначима в теории $\mathcal{T}$, если она не является $\mathcal{T}$-общезначимой
  - *Другое название*: $\mathcal{T}$-необщезначима
  - *Обозначение*: $\not\models_{\mathcal{T}} \varphi$

---

1 Как и раньше, это обозначение необщеизвестно, его придумал я, чтобы сэкономить место на слайдах

Аксиоматические теории

Как и для соответствующих свойств не «в теории $\mathcal{T}$»,
достаточно ограничиться только одним свойством:

Утверждение

формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ $\mathcal{T}$-общезначима

$\psi = \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

предложение ψ $\mathcal{T}$-общезначимо

$\psi = \neg\varphi$ $\qquad$ $\varphi = \neg\psi$

формула $\psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ $\mathcal{T}$-невыполнима

$\varphi = \exists \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ \psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

предложение φ $\mathcal{T}$-невыполнимо

$\varphi = \psi$ $\updownarrow$ противоположный ответ

формула $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ $\mathcal{T}$-выполнима

$\psi = \exists \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$

предложение ψ $\mathcal{T}$-выполнимо

Доказательство. Напрямую следует из определений $\mathcal{T}$-выполнимости, $\mathcal{T}$-невыполнимости и $\mathcal{T}$-общезначимости

Аксиоматические теории

Пример:

$$\sigma = \langle \{0,1,2\}, \{\mathbf{s}^{(1)}, +^{(2)}\}, \{=^{(2)}\} \rangle$$

$\mathcal{I}$ — арифметическая интерпретация из вступительного примера

$$\Gamma = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_0^+, \mathfrak{A}_1^+, \mathfrak{A}_r^=, \mathfrak{A}_s^=, \mathfrak{A}_t^=, \mathfrak{A}_{\mathbf{s}}^=, \mathfrak{A}_+^=\}$$

$$\varphi = (1 + 1 = 2)$$

Γ — теория сигнатуры σ

$\models_\Gamma \varphi$, а значит, предложение φ является Γ-общезначимым

$\mathcal{I} \models \Gamma$, но $\mathcal{I} \not\models \neg\varphi$, а значит, $\Gamma \not\models \neg\varphi$, и следовательно,

- предложение $\neg\varphi$ не является Γ-общезначимым
- предложение φ не является Γ-невыполнимым
- предложение φ является Γ-выполнимым

$\models_\Gamma \neg\neg\varphi$, а значит,

- предложение $\neg\varphi$ является Γ-невыполнимым
- предложение $\neg\varphi$ не является Γ-выполнимым

Проблема общезначимости формул в теории $\mathcal{T}$

формулируется так:

для заданной формулы φ проверить,

является ли эта формула $\mathcal{T}$-общезначимой:

$$\models_{\mathcal{T}} \varphi \ \textbf{?}$$