

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 8

Метод семантических таблиц:
семантические таблицы

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Вступление

Чтобы избежать проблем, возникших при попытке адаптировать переборный метод проверки общезначимости формул, попробуем предложить другой метод решения этой задачи, опирающийся **только** на введённую ранее семантику операций

Начнём с примера (назовём его **ООФП** для отсылок): попробуем обосновать *от противного* общезначимость формулы $\forall x P(x) \rightarrow P(c)$:

1. Предположим, что $\not\models \forall x P(x) \rightarrow P(c)$
2. Тогда существует интерпретация \mathcal{I} , такая что $\mathcal{I} \not\models \forall x P(x) \rightarrow P(c)$
3. Из $\mathcal{I} \not\models \forall x P(x) \rightarrow P(c)$ и семантики \rightarrow следует $\mathcal{I} \models \forall x P(x)$ и $\mathcal{I} \not\models P(c)$
4. Из $\mathcal{I} \models \forall x P(x)$ и семантики \forall следует $\mathcal{I} \models P(c)$
5. Получены соотношения $\mathcal{I} \not\models P(c)$ и $\mathcal{I} \models P(c)$ — такого быть не может, а значит, исходное предположение неверно ▼

Попробуем систематизировать ход таких рассуждений и избавиться от лишних слов в доказательстве

Определения

Семантическая таблица (логики предикатов) — это упорядоченная пара множеств формул (логики предикатов)

Будем называть два множества семантической таблицы её **левой частью** (первое) и **правой частью** (второе)

Будем записывать семантическую таблицу так: $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$, где Γ — левая часть и Δ — правая часть

В записи множеств в семантических таблицах иногда будем опускать фигурные скобки и писать « $,$ » вместо « \cup »

Например, $\langle P(c), Q(x) \mid \exists x Q(x) \rangle$ — это семантическая таблица с левой частью $\{P(c), Q(x)\}$ и правой частью $\{\exists x Q(x)\}$

Содержательно (согласно **ООФП**), формулу φ в левой части таблицы можно понимать как отвечающую соотношению $\mathcal{I} \models \varphi$, а в правой — как отвечающую соотношению $\mathcal{I} \not\models \varphi$

Определения

Таблица $T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ **закрота**, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

Например,

- ▶ таблица $\langle P(\mathbf{c}), \underline{\forall x Q(x)} \mid \underline{\forall x Q(x)}, R(\mathbf{c}) \rangle$ закрыта
- ▶ таблица $\langle P(x), \neg P(x) \mid P(y), Q(x) \rangle$ незакрота

Содержательно (согласно **ООФП**), если $\varphi \in \Gamma \cap \Delta$, то это означает, что получено *явное противоречие*: соотношения $\mathcal{I} \models \varphi$ и $\mathcal{I} \not\models \varphi$

Таблица $T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ **атомарна**, если все формулы из $\Gamma \cup \Delta$ атомарны

Например,

- ▶ таблица $\langle P(x) \mid Q(\mathbf{f}(\mathbf{c}), x), P(\mathbf{d}) \rangle$ атомарна
- ▶ таблицы $\langle \underline{\forall x P(x)} \mid Q(\mathbf{f}(\mathbf{c}), x), P(\mathbf{d}) \rangle$ и $\langle P(x) \mid Q(\mathbf{f}(\mathbf{c}), x) \underline{\vee} P(\mathbf{d}) \rangle$ неатомарны

Содержательно (согласно **ООФП**), атомарная таблица отвечает «окончательному» набору соотношений вида $\mathcal{I} \models \varphi$ и $\mathcal{I} \not\models \psi$, из которого невозможно извлечь другие аналогичные соотношения, существенные для **ООФП**

Определения

Пусть \tilde{x}^n — все свободные переменные формул из $\Gamma \cup \Delta$

Таблица $T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ **выполнима**, если существуют интерпретация \mathcal{I} и набор предметов d^n из области интерпретации, такие что

- ▶ $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[d^n]$ для любой формулы φ из Γ
- ▶ $\mathcal{I} \not\models \psi(\tilde{x}^n)[d^n]$ для любой формулы ψ из Δ

Содержательно (согласно **ООФП**), выполнимость таблицы означает, что в имеющихся соотношениях вида $\mathcal{I} \models \varphi$ и $\mathcal{I} \not\models \psi$ нет противоречия

Определения

Например:

- ▶ Таблица $\langle P(x) \mid Q(\mathbf{f}(\mathbf{c}), x) \rangle$ выполнима (и незакрыта, и атомарна)
Интерпретация и предметы, подтверждающие выполнимость:
 - ▶ $D = \{d\}$, $\bar{P}(d) = \text{t}$, $\bar{Q}(d, d) = \text{f}$
 - ▶ $d_x = d$
- ▶ Таблица $\langle \exists x P(x), \neg P(y) \mid \forall x P(x), P(x) \& \neg P(x) \rangle$ выполнима (и незакрыта, и неатомарна)
Интерпретация и предметы, подтверждающие выполнимость:
 - ▶ $D = \{0, 1\}$, $\bar{P}(0) = \text{t}$, $\bar{P}(1) = \text{f}$
 - ▶ $d_x = d_y = 1$
- ▶ Таблица $\langle P(x) \mid P(x), Q(\mathbf{f}(\mathbf{c}), x) \rangle$ невыполнима (и закрыта, и атомарна)
- ▶ Таблица $\langle \forall x P(x) \mid \neg \exists x \neg P(x) \rangle$ невыполнима (и незакрыта, и неатомарна)

Основные утверждения

Теорема (о табличной проверке общезначимости)

Для любой формулы φ справедлива равносильность

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{таблица } \langle \mid \varphi \rangle \text{ невыполнима}$$

Доказательство.

$$\models \varphi(\tilde{x}^n)$$

$$\Leftrightarrow$$

$\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ для любой интерпретации \mathcal{I}
и любого набора предметов \tilde{d}^n

$$\Leftrightarrow$$

таблица $\langle \mid \varphi \rangle$ невыполнима ▼

Утверждение. Любая закрытая таблица невыполнима

Утверждение. Любая незакрытая атомарная таблица выполнима

Доказательства утверждений опустим для экономии времени