Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 8

Логика высказываний:
метод семантических таблиц

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Вступление

Чтобы избежать проблем, возникших при попытке адаптировать переборный метод проверки общезначимости формул, попробуем предложить другой метод решения этой задачи, опирающийся **только** на логическую (индуктивную) семантику связок

Начнём с примера: попробуем доказать таким способом, что

$$\models \mathrm{x} \mathbin{\&} \mathrm{y} \to \mathrm{x}$$

1. Предположим, что $\not\models \mathrm{x} \mathbin{\&} \mathrm{y} \to \mathrm{x}$
2. Тогда существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что $\mathcal{I} \not\models \mathrm{x} \mathbin{\&} \mathrm{y} \to \mathrm{x}$
3. Из «$\mathcal{I} \not\models \mathrm{x} \mathbin{\&} \mathrm{y} \to \mathrm{x}$» и семантики «$\to$» следует $\mathcal{I} \models \mathrm{x} \mathbin{\&} \mathrm{y}$ и $\mathcal{I} \not\models \mathrm{x}$
4. Из $\mathcal{I} \models \mathrm{x} \mathbin{\&} \mathrm{y}$ и семантики $\&$ следует $\mathcal{I} \models \mathrm{x}$ и $\mathcal{I} \models \mathrm{y}$
5. Получены соотношения $\mathcal{I} \not\models \mathrm{x}$ и $\mathcal{I} \models \mathrm{x}$ — такого быть не может, а значит, исходное предположение неверно ▼

Попробуем систематизировать ход таких рассуждений и избавиться от лишних слов в доказательстве

Семантические таблицы

Семантическая таблица T — это упорядоченная пара множеств формул:

$$T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$$

Множество формул $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ в каждой из частей таблицы будем также записывать без скобок (как последовательность): $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$

Содержательное пояснение

На каждом шаге рассуждений в последнем примере имелся набор *положительных* фактов «$\mathcal{I} \models \psi$» и *отрицательных* фактов «$\mathcal{I} \not\models \psi$»

В левой части таблицы (Γ) записываются формулы из положительных фактов, а в правой (Δ) — из отрицательных фактов

Например, набор фактов $\mathcal{I} \models \mathrm{y}$, $\mathcal{I} \models \mathrm{x}$, $\mathcal{I} \not\models \mathrm{x}$ записывается в виде таблицы $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \mid \mathrm{x} \rangle$

Семантические таблицы

Таблица T выполнима, если существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что

- для каждой формулы ψ из Γ верно $\mathcal{I} \models \psi$ и
- для каждой формулы χ из Δ верно $\mathcal{I} \not\models \chi$

Таблица T закрыта, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

Таблица T атомарна, если все формулы из Γ и Δ атомарны

Содержательное пояснение

Выполнимость таблицы — это отсутствие
явных и неявных противоречий в имеющемся наборе фактов

В закрытой таблице содержится явное противоречие:
про некоторую формулу χ утверждается одновременно $\mathcal{I} \models \chi$ и $\mathcal{I} \not\models \chi$

Атомарная таблица — это способ явного задания интерпретации
как набора значений переменных

Например,

- таблица $\langle \mathrm{x} \mid \mathrm{y} \rangle$ выполнима, незакрыта и атомарна
- таблица $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \mid \mathrm{x} \rangle$ невыполнима, закрыта и атомарна
- таблица $\langle \ \mid \mathrm{x} \,\&\, \mathrm{y} \to \mathrm{x} \rangle$ невыполнима, незакрыта и неатомарна

Семантические таблицы

Утверждение. **Для любой формулы φ**

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{таблица } \langle \mid \varphi \rangle \text{ невыполнима}$$

Утверждение. **Любая закрытая таблица невыполнима**

Утверждение. **Любая незакрытая атомарная таблица выполнима**

Доказательство. Следует из определений, можете убедиться сами

Теперь перейдём к тому, как можно преобразовывать таблицы,
извлекая явные противоречия из невыполнимых таблиц
и явное обозначение выполнимости из выполнимых

Преобразовывать таблицы будем до получения желаемого исхода по особым заранее сформулированным правилам, начав с таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$

Доказательства такого вида (преобразование записей по правилам) принято называть логическим выводом

Логический вывод, в котором преобразуются семантические таблицы, принято называть табличным выводом,
а соответствующие правила — правилами табличного вывода

Табличный вывод

Будем использовать правила табличного вывода двух видов:

$$(*)\colon\ \frac{T_0}{T_1}, \qquad (**)\colon\ \frac{T_0}{T_1,\ T_2},$$

где T_0, T_1, T_2 — семантические таблицы

Согласно правилу, рассматриваемая таблица T_0 преобразуется в

- (*) в таблицу T_1 для последующего рассмотрения
- (**) в таблицы T_1 и T_2 для поочерёдного рассмотрения

При этом правила будут подобраны так, чтобы

- (*) таблица T_0 была выполнима тогда и только тогда, когда и T_1
- (**) таблица T_0 была выполнима тогда и только тогда, когда и **хотя бы одна** из таблиц T_1, T_2

Таблицы T_1, T_2 под чертой в правилах иногда называют альтернативами

Табличный вывод

Правила табличного вывода для логики высказываний:

$$L\&: \quad \frac{\langle \Gamma, \varphi \,\&\, \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad\qquad R\&: \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \,\&\, \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee: \quad \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle} \qquad\qquad R\vee: \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\to: \quad \frac{\langle \Gamma, \varphi \to \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad\qquad R\to: \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \to \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\neg: \quad \frac{\langle \Gamma, \neg\varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle} \qquad\qquad R\neg: \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg\varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

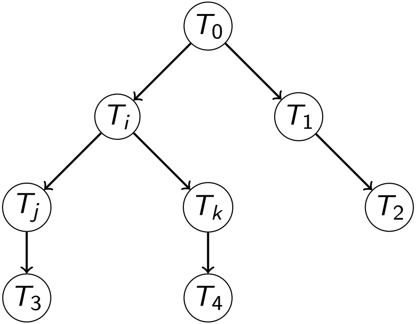
Здесь

- φ, ψ — формулы (*логики высказываний*)
- Γ, Δ — множества формул

Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

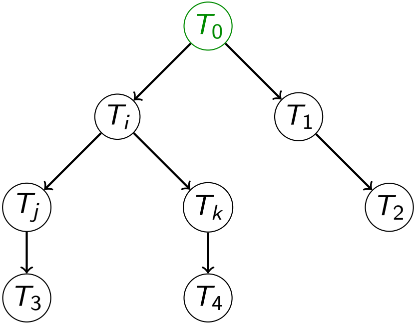
1. его вершинам приписаны семантические таблицы



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

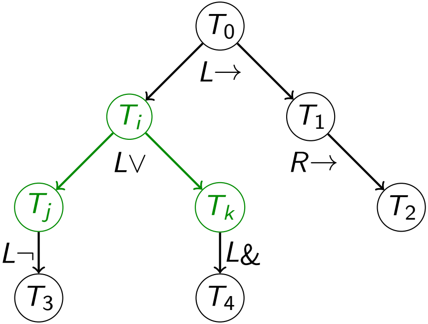
2. его корню приписана таблица T_0



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

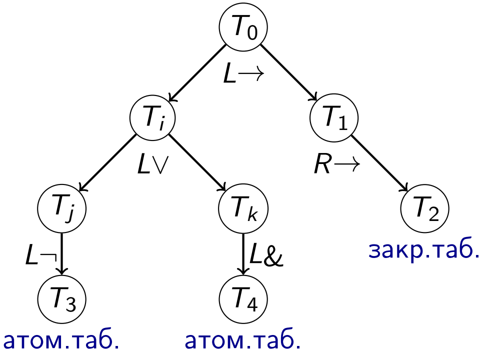
3. из T_i исходят дуги в T_j (и T_k) $\quad\Leftrightarrow$
   $\dfrac{T_i}{T_j(, T_k)}$ — правило табличного вывода



Табличный вывод

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево следующего вида:

4. все таблицы, приписанные листьям, закрыты или атомарны



Табличный вывод

Табличный вывод успешен, если
он конечен и **всем** его листьям приписаны закрытые таблицы

Успешный табличный вывод явно демонстрирует, что таблица,
для которой он построен, невыполнима (*докажем это позже*)

Тогда если этот вывод построен для таблицы $\langle\ |\ \varphi\rangle$, то $\models \varphi$

Семантическая таблица $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ конечна,
если $\Gamma \cup \Delta$ — конечное множество формул

Утверждение. Любой табличный вывод в логике высказываний для любой конечной таблицы конечен

Доказательство
Глубина вывода для таблицы $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ не превосходит $(N + 1)$,
где N — суммарное число связок в формулах из $\Gamma \cup \Delta$ ▼

Табличный вывод: примеры

$$\langle\ \mid x \to x \vee y\rangle$$

$$\Big\downarrow R{\to}$$

$$\langle x \mid x \vee y\rangle$$

$$\Big\downarrow R{\vee}$$

$$\langle x \mid x, y\rangle$$

закрытая таблица

Вывод успешен

При этом $\models x \to x \vee y$

Табличный вывод: примеры

$$
\begin{tikzcd}
& \langle \; \mid \mathrm{x} \lor \mathrm{y} \to \mathrm{x} \rangle \arrow[d, "R\to"] & \\
& \langle \mathrm{x} \lor \mathrm{y} \mid \mathrm{x} \rangle \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "L\lor"] & \\
\langle \mathrm{x} \mid \mathrm{x} \rangle & & \langle \mathrm{y} \mid \mathrm{x} \rangle
\end{tikzcd}
$$

незакрытая атомарная таблица

Вывод неуспешен

При этом $\not\models \mathrm{x} \lor \mathrm{y} \to \mathrm{x}$

Табличный вывод: примеры

$$
\begin{tikzcd}
& \langle \mid (x \to \neg y) \to (y \to \neg x) \rangle \arrow[d, "R\to"] & \\
& \langle x \to \neg y \mid y \to \neg x \rangle \arrow[d, "R\to"] & \\
& \langle x \to \neg y, y \mid \neg x \rangle \arrow[d, "R\neg"] & \\
& \langle x \to \neg y, y, x \mid \rangle \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "L\to"] & \\
\langle \neg y, y, x \mid \rangle \arrow[d, "L\neg"] & & \langle y, x \mid x \rangle \\
\langle y, x \mid y \rangle & & \text{закрытая таблица} \\
\text{закрытая таблица} & &
\end{tikzcd}
$$

Вывод успешен

При этом $\models (x \to \neg y) \to (y \to \neg x)$

Табличный вывод

Лемма (о корректности правил табличного вывода в ЛВ)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(, T_2)}$:

$$L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ L\to,\ R\to,\ L\neg,\ R\neg \text{ —}$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство

Подробно остановимся только на правиле $L\to$: $\frac{\langle \Gamma, \varphi \to \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$

Пусть верхняя таблица выполнима —
покажем, что тогда выполнима хотя бы одна из нижних таблиц

По определению выполнимости таблицы,
существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что

- для любой формулы χ' из Γ верно $\mathcal{I} \models \chi'$
- для любой формулы χ'' из Δ верно $\mathcal{I} \not\models \chi''$
- $\mathcal{I} \models \varphi \to \psi$

Табличный вывод

Лемма (о корректности правил табличного вывода в ЛВ)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1(, T_2)}$:

$$L\&,\ R\&,\ L\vee,\ R\vee,\ L\to,\ R\to,\ L\neg,\ R\neg\ —$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда,
когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Доказательство $\quad \chi' \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \models \chi' \qquad \chi'' \in \Delta \Rightarrow \mathcal{I} \not\models \chi'' \qquad \mathcal{I} \models \varphi \to \psi$

Так как $\mathcal{I} \models \varphi \to \psi$, верно хотя бы одно из двух:

- $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- $\mathcal{I} \models \psi$

Значит, хотя бы одна из таблиц $\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle$, $\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle$ выполнима

Рассуждения в обратную сторону
и для остальных связок аналогичны ▼

Табличный вывод

Теорема (о табличном выводе в ЛВ)
Пусть D — табличный вывод для конечной таблицы T. Тогда

$$\text{таблица } T \text{ невыполнима} \quad \Leftrightarrow \quad \text{вывод } D \text{ успешен}$$

Доказательство. Следует из
леммы о корректности правил табличного вывода,
конечности табличного вывода и
невыполнимости закрытых таблиц ▼

Следствие. **Для любой формулы φ логики высказываний верно:**
$\models \varphi \Leftrightarrow$ для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$ существует успешный табличный вывод

Следствие. **Для любой формулы φ логики высказываний верно:**
$\models \varphi \Leftrightarrow$ все выводы для таблицы $\langle \mid \varphi \rangle$ успешны