Математическая логика

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы $\to$ Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 37

Основные свойства аксиоматических теорий

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Непротиворечивость

Теория $\mathcal{T}$ называется теорией (для) интерпретации $\mathcal{I}$ (*той же сигнатуры*), если $\mathcal{I}$ — модель множества предложений $\mathcal{T}$

$$\text{интерпретация } \mathcal{I} \underset{\text{является теорией для}}{\overset{\text{является моделью для}}{\rightleftarrows}} \text{теория } \mathcal{T}$$

Теория $\mathcal{T}$ называется непротиворечивой, если имеет хотя бы одну модель, а иначе — противоречивой

Утверждение. Если теория $\mathcal{T}$ противоречива, то любая формула φ $\mathcal{T}$-общезначима, $\mathcal{T}$-невыполнима и не $\mathcal{T}$-выполнима

Доказательство. Если теория $\mathcal{T}$ не имеет ни одной модели, то по *определению логического следствия*

- $\mathcal{T} \models \varphi$, то есть формула φ $\mathcal{T}$-общезначима, и
- $\mathcal{T} \models \neg\varphi$, то есть формула φ $\mathcal{T}$-противоречива и, следовательно, не является $\mathcal{T}$-выполнимой ▼

Таким образом, все противоречивые теории **абсолютно бессмысленны**, и имеет смысл рассматривать только непротиворечивые теории

Непротиворечивость

Пример: теория частичных порядков —
это теория сигнатуры $\langle\emptyset, \emptyset, \{<\}\rangle$, содержащая две аксиомы:

- аксиома **антирефлексивности**
$$\forall \mathrm{x}\ \neg(\mathrm{x} < \mathrm{x})$$
- аксиома **транзитивности**
$$\forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ ((\mathrm{x} < \mathrm{y})\,\&\,(\mathrm{y} < \mathrm{z}) \to (\mathrm{x} < \mathrm{z}))$$

Легко видеть, что моделями теории частичных порядков являются все интерпретации, в которых "$<$" оценивается как строгий частичный порядок, и только они

Следовательно, теория частичных порядков

- является теорией любых интерпретаций описанного выше вида и только таких интерпретаций и
- непротиворечива

Непротиворечивость

Другой пример:

теория $\mathcal{T}$ сигнатуры $\big\langle \{0,1,2\}, \{\mathsf{s}^{(1)}, +^{(2)}\}, \{=^{(2)}\} \big\rangle$ из *блока 36*

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 = \mathsf{s}(1) \qquad 1 = \mathsf{s}(0) \\ \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} + 0 = \mathrm{x}) \qquad \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ (\mathrm{x} + \mathsf{s}(\mathrm{y}) = \mathsf{s}(\mathrm{x} + \mathrm{y})) \\ \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{x} = \mathrm{x}) \qquad \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ ((\mathrm{x} = \mathrm{y}) \to (\mathrm{y} = \mathrm{x})) \\ \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ ((\mathrm{x} = \mathrm{y}) \,\&\, (\mathrm{y} = \mathrm{z}) \to (\mathrm{x} = \mathrm{z})) \\ \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ ((\mathrm{x} = \mathrm{y}) \to (\mathsf{s}(\mathrm{x}) = \mathsf{s}(\mathrm{y}))) \\ \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{u}\ \forall \mathrm{v}\ ((\mathrm{x} = \mathrm{u}) \,\&\, (\mathrm{y} = \mathrm{v}) \to (\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{u} + \mathrm{v})) \end{array} \right\}$$

“Арифметическая” интерпретация $\mathcal{I}$ является моделью для $\mathcal{T}$

Но помимо этого моделью теории $\mathcal{T}$ является и такая интерпретация $\mathcal{J}$:

- В предметной области содержится один предмет d
- $\overline{0} = \overline{1} = \overline{2} = \overline{\mathsf{s}}(d) = \overline{+}(d,d) = d$
- $\overline{=}(d,d) = \mathbb{t}$

Так как $\mathcal{I}$ — модель теории $\mathcal{T}$ и $\mathcal{I} \not\models (1+1=1)$, верно $\not\models_{\mathcal{T}} (1+1=1)$

Так как $\mathcal{J}$ — модель теории $\mathcal{T}$ и $\mathcal{J} \models (1+1=1)$, верно $\not\models_{\mathcal{T}} \neg(1+1=1)$

Полнота и элементарность

Теория $\mathcal{T}$ из последнего примера оказалась *не самой лучшей*:

- эта теория придумывалась
  для обоснования арифметических утверждений,
- но нашлось утверждение φ (“$1 + 1 = 1$”), которое невозможно
  как обосновать ($\not\models_{\mathcal{T}} \varphi$), так и опровергнуть ($\not\models_{\mathcal{T}} \neg\varphi$)

Для каждой интерпретации $\mathcal{I}$ (очевидно, что) справедливо следующее свойство: для любого предложения φ верно либо $\mathcal{I} \models \varphi$, либо $\mathcal{I} \models \neg\varphi$

Значит, и для *самой лучшей* теории, предназначенной для обоснования утверждений, смысл которых задаётся интерпретацией $\mathcal{I}$, должно быть справедливо аналогичное свойство:

Теория $\mathcal{T}$ называется полной, если для любого предложения φ выполняется хотя бы одно из соотношений

$$\models_{\mathcal{T}} \varphi, \qquad \models_{\mathcal{T}} \neg\varphi$$

Полнота и элементарность

Самую лучшую теорию заданной интерпретации $\mathcal{I}$ можно задать так:

- Переберём всевозможные предложения φ
  (*об алгоритме речь не идёт, так что бесконечность числа предложений не считаем препятствием для перебора*)
- Если $\mathcal{I} \models \varphi$, то включим его в теорию (объявим аксиомой), а иначе не будем включать

В результате получится множество всех предложений, истинных в $\mathcal{I}$:

$$\mathsf{Th}(\mathcal{I}) = \{\varphi \mid \varphi \in \mathsf{CForm}, \mathcal{I} \models \varphi\}$$

Это множество обычно называют элементарной теорией интерпретации $\mathcal{I}$

Утверждение. Для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \models \mathsf{Th}(\mathcal{I})$

Доказательство.

По *определению элементарной теории*, если $\varphi \in \mathsf{Th}(\mathcal{I})$, то $\mathcal{I} \models \varphi$ ▼

Следствие

Элементарная теория любой интерпретации непротиворечива

Полнота и элементарность

Утверждение. Элементарная теория любой интерпретации полна

Доказательство.

Рассмотрим произвольные интерпретацию $\mathcal{I}$ и предложение φ

Если $\mathcal{I} \models \varphi$, то

- $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathcal{I})$ (по *определению элементарной теории*)
- $\mathrm{Th}(\mathcal{I}) \models \varphi$
  (по предыдущему пункту и *свойствам логического следствия*)

Иначе $\mathcal{I} \not\models \varphi$, и

- $\mathcal{I} \models \neg\varphi$ (по *семантике* $\neg$)
- $(\neg\varphi) \in \mathrm{Th}(\mathcal{I})$ (по *определению элементарной теории*)
- $\mathrm{Th}(\mathcal{I}) \models \neg\varphi$
  (по предыдущему пункту и *свойствам логического следствия*) ▼

Полнота и элементарность

У любой непротиворечивой теории
существует **бесконечно много** моделей

Но оказывается, что модели **полной** теории в некотором роде одинаковы

Интерпретации $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ элементарно эквивалентны, если
их элементарные теории равны: $\mathrm{Th}(\mathcal{I}) = \mathrm{Th}(\mathcal{J})$

Утверждение

Теория $\mathcal{T}$ полна $\Leftrightarrow$ все её модели элементарно эквивалентны

Доказательство.

($\Rightarrow$): Рассмотрим произвольное предложение φ

Если $\models_{\mathcal{T}} \varphi$, то для любой модели $\mathcal{I}$ теории $\mathcal{T}$ верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Иначе $\models_{\mathcal{T}} \neg\varphi$, и для любой модели $\mathcal{I}$ теории $\mathcal{T}$ верно $\mathcal{I} \models \neg\varphi$

($\Leftarrow$): Рассмотрим произвольные модель $\mathcal{I}$ теории $\mathcal{T}$ и предложение φ

Если $\mathcal{I} \models \varphi$, то для любой модели $\mathcal{J}$ теории $\mathcal{T}$ верно $\mathcal{J} \models \varphi$,
а значит, $\models_{\mathcal{T}} \varphi$

Иначе $\mathcal{I} \models \neg\varphi$, а значит, для любой модели $\mathcal{J}$ теории $\mathcal{T}$ верно $\mathcal{J} \models \neg\varphi$,
и тогда $\models_{\mathcal{T}} \neg\varphi$ ▼

Полнота и элементарность

Вернёмся к последнему примеру:
теория $\mathcal{T}$ сигнатуры $\left\langle \{0,1,2\}, \{\mathsf{s}^{(1)}, +^{(2)}\}, \{=^{(2)}\} \right\rangle$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 = \mathsf{s}(1) \qquad 1 = \mathsf{s}(0) \\ \forall \mathrm{x}\, (\mathrm{x} + 0 = \mathrm{x}) \qquad \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} + \mathsf{s}(\mathrm{y}) = \mathsf{s}(\mathrm{x} + \mathrm{y})) \\ \forall \mathrm{x}\, (\mathrm{x} = \mathrm{x}) \qquad \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, ((\mathrm{x} = \mathrm{y}) \to (\mathrm{y} = \mathrm{x})) \\ \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z}\, ((\mathrm{x} = \mathrm{y})\,\&\,(\mathrm{y} = \mathrm{z}) \to (\mathrm{x} = \mathrm{z})) \\ \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, ((\mathrm{x} = \mathrm{y}) \to (\mathsf{s}(\mathrm{x}) = \mathsf{s}(\mathrm{y}))) \\ \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{u}\, \forall \mathrm{v}\, ((\mathrm{x} = \mathrm{u})\,\&\,(\mathrm{y} = \mathrm{v}) \to (\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{u} + \mathrm{v})) \end{array} \right\}$$

Модель $\mathcal{I}$: “арифметическая” интерпретация

Модель $\mathcal{J}$ с одним предметом d:

- $\overline{0} = \overline{1} = \overline{2} = \overline{\mathsf{s}}(d) = \overline{+}(d,d) = d$
- $\overline{=}(d,d) = \mathbb{t}$

Верно $\mathcal{I} \models (1 + 1 = 1)$ и $\mathcal{J} \not\models (1 + 1 = 1)$

Значит, модели $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ не являются элементарно эквивалентными, и теория $\mathcal{T}$ неполна

Полнота и элементарность

Другой пример: теория частичных порядков

$$\mathcal{T}_< = \left\{ \begin{array}{c} \forall \mathtt{x}\ \neg(\mathtt{x} < \mathtt{x}) \\ \forall \mathtt{x}\ \forall \mathtt{y}\ \forall \mathtt{z}\ ((\mathtt{x} < \mathtt{y})\,\&(\mathtt{y} < \mathtt{z}) \to (\mathtt{x} < \mathtt{z})) \end{array} \right\}$$

Модель $\mathcal{I}$: множество чисел $\{0, 1, \ldots, 10\}$ с естественным порядком

Модель $\mathcal{J}$: множество чисел $\mathbb{N}_0$ с естественным порядком

Предложение φ: $\exists \mathtt{x}\ \forall \mathtt{y}\ (\mathtt{y} < \mathtt{x})$ (*существует наибольшее число*)

Тогда верны соотношения

- $\mathcal{I} \models \varphi$ (10 — наибольшее число)
- $\mathcal{J} \not\models \varphi$ (в $\mathbb{N}_0$ нет наибольшего числа)

Значит, модели $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ не являются элементарно эквивалентными, и теория $\mathcal{T}_<$ неполна

Разрешимость

При работе с аксиоматической теорией нередко хочется
не только выделить среди предложений верные (теоремы),
но и практически **автоматизировать** проверку верности

Теория $\mathcal{T}$ называется разрешимой, если
проблема $\mathcal{T}$-общезначимости формул *алгоритмически разрешима*

Утверждение. Любая конечная полная теория разрешима

Доказательство.

Рассмотрим произвольную конечную полную теорию $\mathcal{T} = \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$
и произвольную формулу $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

По *определению полноты*, верно хотя бы одно из соотношений

$$\mathcal{T} \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \varphi, \qquad \mathcal{T} \models \neg\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \varphi$$

По *теореме о логическом следствии*, хотя бы одна из формул

$$\chi_+ = (\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \varphi), \qquad \chi_- = (\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \neg\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \varphi)$$

общезначима

По *теореме о табличном выводе*, хотя бы одна из таблиц
$T_+ = \langle \mid \chi_+ \rangle$, $T_- = \langle \mid \chi_- \rangle$ невыполнима

Разрешимость

Доказательство (продолжение).

$$(T_+ = \langle \mid \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_k \to \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi \rangle,\ T_- = \langle \mid \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_k \to \neg\forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi \rangle)$$

Алгоритм решения проблемы $\mathcal{T}$-общезначимости формул можно устроить так:

- Будем одновременно (*параллельно*) строить табличные выводы для T_+ и T_- согласно *стратегии из доказательства о полноте табличного вывода*
- Стратегией гарантируется, что за конечное число действий для одной из таблиц T_+, T_- будет построен успешный табличный вывод
- Если успешный вывод построен для T_+, то формула φ $\mathcal{T}$-общезначима
- Если успешный вывод построен для T_-, то формула φ не $\mathcal{T}$-общезначима ▼

Для самостоятельного размышления: а существует ли такая хорошая теория — непротиворечивая, конечная и полная?