

Математическая логика

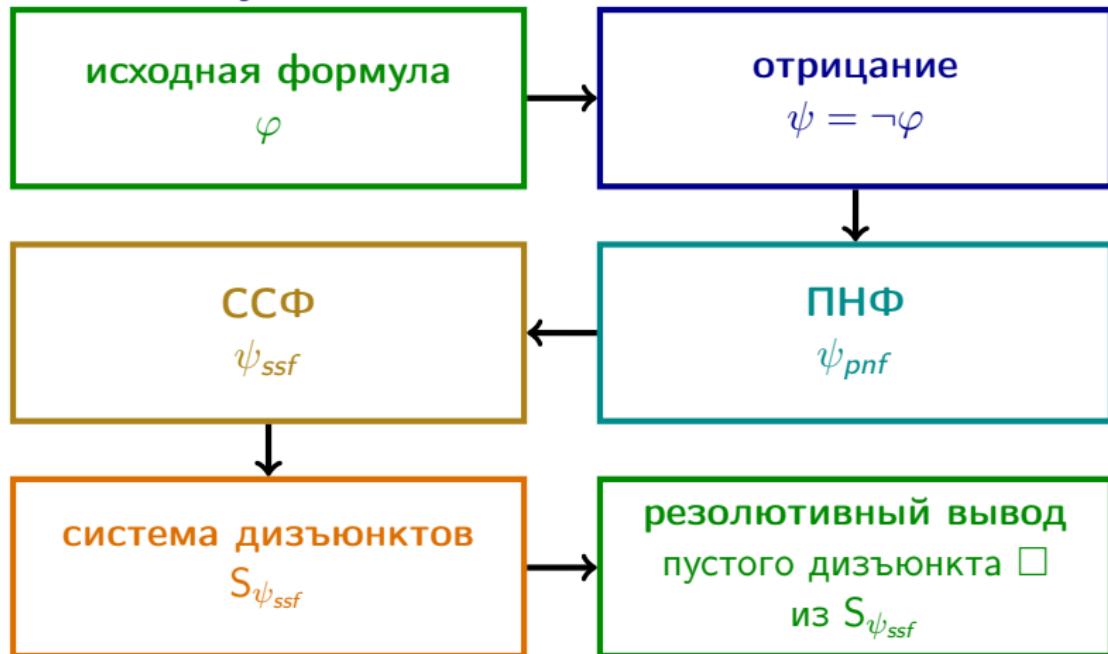
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 24

Эрбрановские интерпретации
Теорема об эрбрановских интерпретациях

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

Краткое вступление



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

\Leftarrow существует вывод \square из $S_{\psi_{ssf}}$

Последняя недостающая деталь метода резолюций — « \Leftrightarrow » на месте « \Leftarrow »

Краткое вступление

Временно забудем про метод резолюций
и попробуем выделить общую часть рассуждений «в лоб»
о невыполнимости системы дизъюнктов S в заданной интерпретации \mathcal{I}

Для примера рассмотрим такую систему: $S = \{P(x), \neg P(f(c))\}$

Для обоснования невыполнимости S достаточно заметить,
что в любой модели \mathcal{I} для S предмет, описываемый термом $f(c)$,
и обладает свойством P ($\mathcal{I} \models \forall x P(x)$), и не обладает ($\mathcal{I} \models \neg P(f(c))$)

В этом замечании не используются
природа предметной области \mathcal{I} и устройство оценок \bar{c} и \bar{f} ,
и важно лишь то, каким термом задаётся «противоречивый» предмет

Если в интерпретации \mathcal{I} заменить каждый предмет
множеством основных термов, описывающих этот предмет,
и сохранить устройство оценки P , то в результате получится
эрбрановская интерпретация

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановская интерпретация (она же \mathcal{H} -интерпретация)

сигнатуры $\sigma = \langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$ состоит из

- ▶ стандартной предметной области \mathcal{H}_σ :
эрбрановского универсума (\mathcal{H} -универсума)
 - ▶ \mathcal{H}_σ — это множество всех основных термов сигнатуры
 - ▶ σ , если $\text{Const} \neq \emptyset$
 - ▶ $\langle \{\mathbf{c}_{\mathcal{H}}\}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$, если $\text{Const} = \emptyset$ ($\mathbf{c}_{\mathcal{H}}$ — эрбрановская константа)
- ▶ стандартной оценки констант $\overline{\text{Const}}_{\mathcal{H}}$:
 - ▶ $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$ $(\mathbf{c} \in \text{Const})$
- ▶ стандартной оценки функциональных символов $\overline{\text{Func}}_{\mathcal{H}}$:
 - ▶ $\bar{\mathbf{f}}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{f}(t_1, \dots, t_n)$ $(\mathbf{f}^{(n)} \in \text{Func}; t_1, \dots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma)$
- ▶ произвольной оценки предикатных символов $\overline{\text{Pred}}$

Первые три пункта означают, что \mathcal{H} -интерпретация — это интерпретация, построенная над свободной алгеброй термов

Все \mathcal{H} -интерпретации заданной сигнатуры
отличаются друг от друга только выбором оценки $\overline{\text{Pred}}$

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановский базис ($B_{\mathcal{H}}$) — это множество всех атомов, построенных над термами \mathcal{H} -универсума

\mathcal{H} -интерпретация \mathcal{I} **полностью** определяется тем, какие атомы из $B_{\mathcal{H}}$ в ней истинны, то есть множеством

$$B^{\mathcal{I}} = \{A \mid A \in B_{\mathcal{H}}, \mathcal{I} \models A\}$$

Например,

- ▶ $B^{\mathcal{I}} = \emptyset$: все основные атомы **ложны** в \mathcal{I}
- ▶ $B^{\mathcal{I}} = B_{\mathcal{H}}$: все основные атомы **истинны** в \mathcal{I}
- ▶ $B^{\mathcal{I}} = B^{\mathcal{J}'} \cap B^{\mathcal{J}''}$: в \mathcal{I} истинны те и только те основные атомы, которые истинны в обеих интерпретациях $\mathcal{J}', \mathcal{J}''$

Для удобного использования теоретико-множественной нотации будем отождествлять \mathcal{H} -интерпретацию \mathcal{I} с множеством $B^{\mathcal{I}}$

Теорема об эрбрановских интерпретациях

Система дизъюнктов выполнима тогда и только тогда, когда она имеет эрбрановскую модель

Доказательство.

Рассмотрим произвольную систему дизъюнктов S и докажем теорему для этой системы

(\Leftarrow) очевидно:

если S выполняется в некоторой эрбрановской интерпретации то S выполняется хотя бы в одной интерпретации

(\Rightarrow)

Пусть система S выполнима

Тогда для неё существует модель $\mathcal{I} = \langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle$

Построим по интерпретации \mathcal{I} эрбрановскую модель \mathcal{I}_H для S той же сигнатуры σ

Теорема об эрбрановских интерпретациях

Доказательство. (\Rightarrow)

$$\mathcal{I} = \langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$$

Предметная область \mathcal{H}_σ интерпретации $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ — это множество основных термов сигнатуры σ (если $\text{Const} = \emptyset$, то сигнатуры $\langle \{c_{\mathcal{H}}\}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$)

Если $\text{Const} = \emptyset$, то добавим и произвольно оценим константу $c_{\mathcal{H}}$ в \mathcal{I}

Поставим такое соответствие $\alpha : \mathcal{H}_\sigma \rightarrow D$:

$\alpha(t)$ — значение терма t в \mathcal{I}

Зададим оценку $\overline{\overline{P}}$ каждого предикатного символа P в $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ так:

$$\overline{\overline{P}}(t_1, \dots, t_k) = \overline{P}(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k))$$

То же самое другими словами — зададим интерпретацию $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ так:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \{P(t_1, \dots, t_k) \mid P(t_1, \dots, t_k) \in B_{\mathcal{H}}, \overline{P}(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k)) = \mathbf{t}\}$$

Покажем, что такая интерпретация $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ является моделью для S

Но для начала приведём пример, чтобы стало понятнее, как соотносятся \mathcal{I} и $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$

Теорема об эрбрановских интерпретациях

Доказательство. (\Rightarrow)

$$\mathcal{I} = \langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$$

Пример: рассмотрим интерпретацию \mathcal{I} сигнатуры $\langle \{0\}, \{s^{(1)}\}, \{<^{(2)}\} \rangle$ с естественным арифметическим устройством:

- ▶ предметная область — множество всех целых чисел
- ▶ $\bar{0}$ — число 0;
- $\bar{s}(n) = n + 1;$
- $\bar{<}$ — отношение строгого неравенства чисел

Тогда:

- ▶ $\mathcal{H}_{\sigma} = \{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \dots\}$
- ▶ $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} =$
$$\left\{ \begin{array}{lll} 0 < s(0), & s(0) < s(s(0)), & s(s(0)) < s(s(s(0))), \\ 0 < s(s(0)), & s(0) < s(s(s(0))), & s(s(0)) < s(s(s(s(0)))), \\ 0 < s(s(s(0))), & s(0) < s(s(s(s(0)))), & s(s(0)) < s(s(s(s(s(0))))), \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right\}$$

Теорема об эрбрановских интерпретациях

Доказательство. (\Rightarrow)

$$\mathcal{I} = \langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$$

Предположим (от противного), что $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models S$

Тогда в S содержится дизъюнкт D , такой что $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models D$

Пусть, для ясности, $D = \forall \tilde{x}^n (A_1 \vee \dots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m)$,
где $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_m$ — атомы

Тогда существуют термы $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{H}_{\sigma}$, такие что

$$\begin{array}{ll} \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_1[t_1, \dots, t_n] & \dots \\ \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_1[t_1, \dots, t_n] & \dots \end{array} \quad \begin{array}{ll} \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_k[t_1, \dots, t_n] & \\ \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_m[t_1, \dots, t_n] & \end{array}$$

По заданию интерпретации $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$, верно и

$$\begin{array}{ll} \mathcal{I} \not\models A_1[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] & \dots \\ \mathcal{I} \models B_1[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] & \dots \end{array} \quad \begin{array}{ll} \mathcal{I} \not\models A_k[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] & \\ \mathcal{I} \models B_m[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] & \end{array}$$

Следовательно, $\mathcal{I} \not\models \forall \tilde{x}^n (A_1 \vee \dots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m)$, что
противоречит выбору \mathcal{I} как **модели** для S

Значит, предположение « $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models S$ » неверно, то есть $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models S$ ▼