# Лекция 3. Частично упорядоченные множества (ЧУМ). Диаграмма Хассе. Максимальные, минимальные, наибольший и наименьший элементы. Цепи и антицепи, длина и ширина конечных ЧУМ. Теорема о разбиении ЧУМ на антицепи. Теорема Дилуорса. Булев куб, его длина и ширина. Булеан.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по "Избранным вопросам дискретной математики".
3-й курс, группа 318,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mathcyb.cs.msu.su

# Отношение частичного порядка

Бинарное отношение $R \subseteq A^2$ на множестве $A$ называется отношением **частичного порядка** на множестве $A$, если оно
1) рефлексивно, т.е. $\forall x \in A$ верно $R(x, x)$;
2) антисимметрично, т.е. $\forall x, y \in A$ из $R(x, y)$ и $R(y, x)$ следует $x = y$ (совпадение элементов);
3) транзитивно, т.е. $\forall x, y, z \in A$ из $R(x, y)$ и $R(y, z)$ следует $R(x, z)$.

Отношение частичного порядка, как правило, обозначается $\leq$.

Если $a, b \in A$ и $a \leq b$, то говорят, что элемент $a$ **предшествует или равен** элементу $b$, или элемент $b$ **следует или равен** элементу $a$.

# Сравнимые и несравнимые элементы

Пусть $R \subseteq A^2$ – отношение частичного порядка на множестве $A$.

Если для элементов $a, b \in A$ верно $R(a, b)$ или верно $R(b, a)$, то элементы $a$ и $b$ называются **сравнимыми**.

Элементы $a, b \in A$, не являющиеся сравнимыми, называются **несравнимыми**.

Если все пары элементов множества $A$ сравнимы относительно порядка $R$, то порядок $R$ называется **линейным**.

Множество $A$ с заданным на нем частичным порядком $R$ называется **частично упорядоченным** множеством (ЧУМ) и обозначается $(A; R)$.

Если частичный порядок $R$ является линейным, то ЧУМ $(A; R)$ называвется **линейно упорядоченным** множеством.

# Примеры частично упорядоченных множеств

**Пример 1.**

1. Множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ целых чисел, $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, $\mathbb{R}$ действительных чисел с обычным сравнением чисел $\leq$ – это линейно упорядоченные множества.

2. Введем на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел отношение $R \subseteq \mathbb{N}^2$ следующим образом: для произвольных чисел $a, b \in \mathbb{N}$ верно $R(a, b)$, если число $a$ является делителем числа $b$.

Несложно проверить, что введенное отношение $R$ является отношением частичного порядка.

Но, например, неверно $R(4, 15)$ и неверно $R(15, 4)$, поэтому числа 4 и 15 – несравнимые элементы этого частичного порядка.

Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел с так введенным отношением $R$ является частично упорядоченным множеством, но не является линейно упорядоченным множеством.

## Некоторые производные отношения

Пусть $(A; \leq)$ – частично упорядоченное множество.

Если для элементов $a, b \in A$ верно $a \leq b$ и $a \neq b$, то пишут $a < b$ и говорят, что элемент $a$ **строго предшествует** элементу $b$, или что элемент $b$ **строго следует** за элементом $a$.

Если для элементов $a, b \in A$ верно $a < b$ и не существует такого элемента $c \in A$, что $a < c < b$, то пишут $a \lessdot b$ и говорят, что элемент $a$ **непосредственно предшествует** элементу $b$, или что элемент $b$ **непосредственно следует** за элементом $a$.

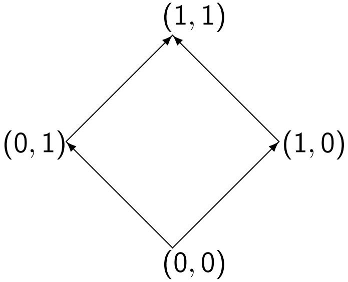
**Например**, в множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел с обычным сравнением чисел $\leq$ верно: $3 < 7$; $3 \lessdot 4$.

# Диаграмма Хассе

Конечные ЧУМ удобно задавать **диаграммой Хассе**.

**Диаграмма Хассе** ЧУМ $(A; \leq)$ – это ориентированный граф $G_A = (V_A, E_A)$, в котором $V_A = A$, $E_A = \{(a, b) \mid a \lessdot b\}$.

**Пример 4.3**. Построим диаграмму Хассе ЧУМ $(B^2; \leq)$, где $B = \{0, 1\}$, и $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$, если $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$.



# Наименьший и минимальные элементы

Пусть $(A; \leq)$ – частично упорядоченное множество.

Элемент $a \in A$ называется **минимальным**, если не существует таких элементов $x \in A$, что верно $x < a$.
Т.е. элемент минимальный, если нет элементов, строго предшествующих ему.

Элемент $a \in A$ называется **наименьшим**, если для всех элементов $x \in A$ верно $a \leq x$.
Другими словами, элемент наименьший, если все другие строго следуют за ним.

# Наименьший и минимальные элементы в диаграмме Хассе

В диаграмме Хассе $G_A$ ЧУМ $(A; \leq)$

вершина $a \in V_A$ сответствует **минимальному** элементу, если в нее дуги не входят (т.е. ее полустепень захода равна нулю).

вершина $a \in V_A$ сответствует **наименьшему** элементу, если существует ориентированный путь из вершины $a$ в любую другую вершину;

## Свойства наименьшего элемента

**Теорема 1**. *Для произвольного частично упорядоченного множества* $(A; \leq)$ *верно:*

**1**. *Наименьший элемент является и минимальным элементом. Обратное в общем случае неверно.*

**2**. *Наименьший элемент, если он есть, всегда единственен.*

**Доказательство**. 1. Вполне очевидно.
2. Пусть $a_1$ и $a_2$ – наименьшие элементы относительно частичного порядке $\leq$ на множестве $A$. Тогда т.к. $a_1$ – наименьший элемент, верно $a_1 \leq a_2$; а т.к. $a_2$ – наименьший элемент, верно $a_2 \leq a_1$. Откуда по аксиоме антисимметричности частичного порядка $\leq$ заключаем, что $a_1 = a_2$.

□

# Наибольший и максимальные элементы

Аналогично вводятся понятия максимального и наибольшего элементов относительно частичного порядка.

Для них верны аналогичные свойства.

# Характеристики ЧУМ

Показательными характеристиками конечных ЧУМ (т.е. ЧУМ с конечным числом элементов) являются **длина** и **ширина**.

Иногда длину и ширину можно определить и для бесконечных ЧУМ

# Цепи и длина ЧУМ

Пусть $(A; \leq)$ – частично упорядоченное множество.

Множество элементов $C \subseteq A$ называется **цепью**, если все элементы этого множества попарно сравнимы.

Цепь является линейно упорядоченным множеством. Поэтому в конечной цепи всегда есть и наименьший, и наибольший элементы.

Число элементов конечной цепи называется ее **длиной**.

**Длиной** конечного частично упорядоченного множества называется длина максимальной цепи в нем.

**Например**, длина конечного линейно упорядоченного множества равна числу элементов в нем (Почему?).

# Антицепи и ширина ЧУМ

Пусть $(A; \leq)$ – частично упорядоченное множество.

Множество элементов $D \subseteq A$ называется **антицепью**, если все элементы этого множества попарно несравнимы.

Множество из одного элемента также считается антицепью.

Число элементов конечной антицепи называется ее **шириной**.

**Шириной** конечного частично упорядоченного множества называется ширина максимальной антицепи в нем.

**Например**, ширина конечного (и бесконечного) линейно упорядоченного множества равна 1 (Почему?).

# Разбиения

**Разбиением** множества $A$ назвается такое семейство непустых его подмножеств $A_1, \ldots, A_k$, что
1) $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$;
2) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$.

Если семейство $A_1, \ldots, A_k$ – разбиение множества $A$, то пишут $A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k$.

Если $(A; \leq)$ – конечное ЧУМ длины $l$, то, понятно, его можно разбить не меньше, чем на $l$ антицепей (почему?).

Аналогично, если ширина конечного ЧУМ $(A; \leq)$ равна $d$, его можно разбить не менее, чем на $d$ антицепей (почему?).

Оказывается, что эти оценки – точные.

# Разбиения ЧУМ на антицепи

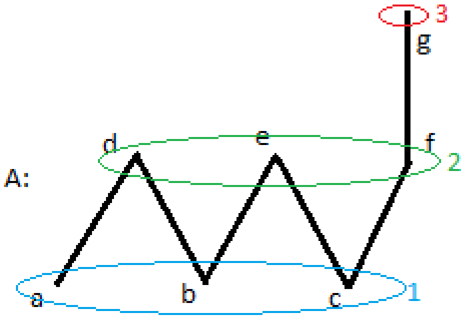
**Теорема 2**. *Минимальное число антицепей, на которое можно разбить (конечное) ЧУМ, равно длине максимальной цепи в этом ЧУМ.*

**Доказательство**. Пусть $(A; \leq)$ – конечное ЧУМ, и длина максимальной цепи в нем равна $l$.
Для каждого элемента $a \in A$ назовем его **высотой** $h(a)$ максимальную длину цепей с наибольшим элементом $a$.
Пусть $S(i)$ – это множество элементов с высотой $i$, $i = 1, \ldots, l$.
Понятно, что для каждого $i$, $1 \leq i \leq l$, множество $S(i)$ непусто (почему?).
Кроме того, $S(i) \cap S(j) = \emptyset$ при $i \neq j$.
Замечая, что каждое $S_i$ является антицепью (почему?), получаем $A = S(1) \sqcup \cdots \sqcup S(l)$.

$\square$

# Разбиение на антицепи ЧУМ

На рис. диаграмма Хассе ЧУМ $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.



# Разбиения ЧУМ на цепи

**Теорема 3 (Дилуорса (Dilworth)).** *Минимальное число цепей, на которое можно разбить (конечное) ЧУМ, равно ширине максимальной антицепи в этом ЧУМ.*

**Доказательство** проведем индукцией по мощности ЧУМ.
Базис индукции для ЧУМ мощности, не превосходящей 2, устанавливается перебором.
Индуктивный переход: пусть для ЧУМ мощности, меньшей $m$, теорема верна.
Рассмотрим ЧУМ $(A; \leq)$, в котором $|A| = m$.
Пусть $a$ – какой-то максимальный элемент этого ЧУМ.
По предположению индукции ЧУМ $(A \setminus \{a\}; \leq)$ можно разбить на $d$ цепей,

$$A = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_d,$$

где $d$ – максимальная ширина антицепи в ЧУМ $A \setminus \{a\}$.

# Разбиения ЧУМ на цепи

**Доказательство** (продолжение).
Назовем элемент **правильным**, если в множестве $A \setminus \{a\}$ найдется $d$-элементная антицепь, в которую он входит.
Заметим, что в каждой цепи $C_i$ найдется хотя бы один правильный элемент (почему?).
Для каждого $i$, $i = 1, \ldots, d$, обозначим наибольший из правльных элементов, входящих в цепь $C_i$ как $a_i$.

Докажем, что $D = \{a_1, \ldots, a_d\}$ – антицепь в $A \setminus \{a\}$.
Предположим противное: пусть $a_i < a_j$ для некоторых $i \neq j$.
Пусть $D_1$ – произвольная антицепь ширины $d$ в $A \setminus \{a\}$, содержащая $a_j$. Но тогда она не содержит ни $a_i$, ни любой другой предшествующий ему элемент. Значит, она не содержит вообще элементов из цепи $C_i$, т.к. $a_i$ – наибольший правильный элемент в $C_i$. Поэтому $|D_1| < d$ – противоречие.

# Разбиения ЧУМ на цепи

**Доказательство** (продолжение). Получили, что $D = \{a_1, \dots, a_d\}$ – антицепь.

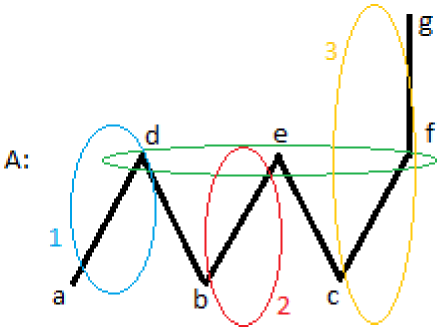
1) Если $\{a\} \cup D$ – антицепь, то $S = \{a\} \sqcup C_1 \sqcup \dots \sqcup C_d$.

2) Пусть множество $\{a\} \cup D$ не является антицепью. Тогда $a_k < a$ для некоторого $k$.
Рассмотрим множество (цепь) $K = \{x \in C_k \mid x \leq a_k\} \cup \{a\}$.
Тогда в множестве $A \setminus K$ нет $d$-элементных антицепей, т.к. все правильные элементы цепи $C_k$ лежат в множестве $K$.
Значит, по предположению индукции ЧУМ $A \setminus K$ можно разбить на $d - 1$ цепей. Добавив к этим цепям цепь $K$, получим разбиение ЧУМ $A$ на $d$ цепей.

$\square$

# Разбиение на цепи ЧУМ

На рис. диаграмма Хассе ЧУМ $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Цепи: $C_1 = a < d$; $C_2 = b < e$; $C_3 = c < f < g$.



# Булев куб

Пусть $B = \{0, 1\}$. $n$-**мерным булевым кубом** $(n \geq 1)$ называется ЧУМ $(B^n; \leq)$, где частичный порядок $\leq$ определяется следующим образом: для произвольных $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in B^n$ и $\beta = (b_1, \ldots, b_n) \in B^n$, верно $\alpha \leq \beta$, если $a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n$.

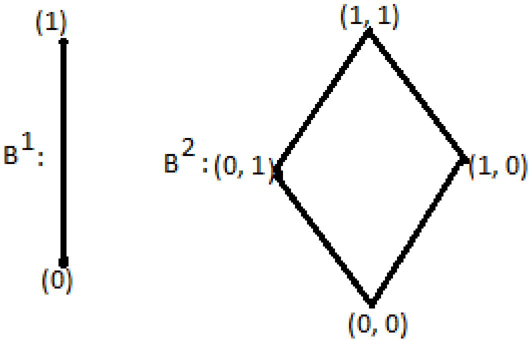
$n$-мерный булев куб обозначается как $B^n$.
Элементы куба $B^n$ называются **наборами**, или **точками**.

**Теорема 4.** *При* $n \geq 1$ *верно* $|B^n| = 2^n$.

**Доказательство.** $|B^n| = \hat{P}(2, n) = 2^n$.

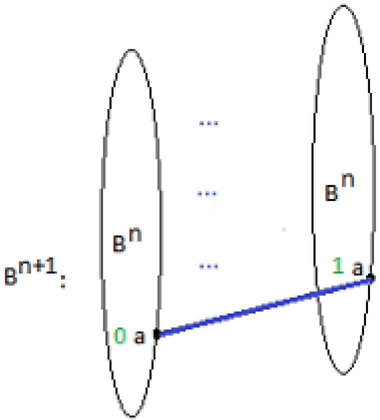
$\square$

# Кубы $B^1$ и $B^2$

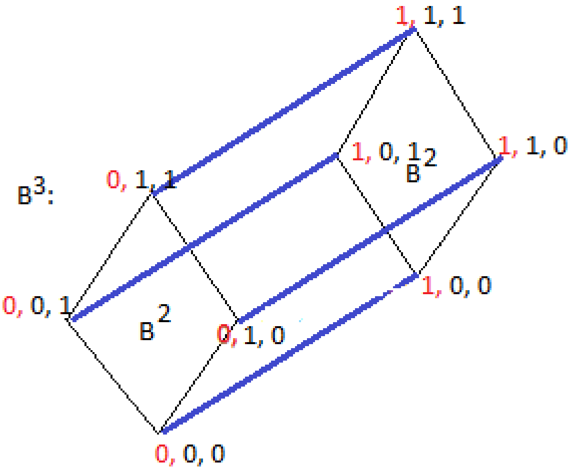


# Индуктивное построение куба $B^n$

Возьмем два куба $B^n$, соединим в них одинаковые точки. Затем всем точкам первого куба припишем первую координату 0, а всем точкам второго куба припишем первую координату 1. Получили куб $B^{n+1}$.



# Куб $B^3$



# Длина булева куба

**Теорема 5**. *При $n \geq 1$ длина $n$-мерного булева куба $B^n$ равна $n+1$.*

**Доказательство**. Рассмотрим цепь $C = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ в кубе $B^n$:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = (0, 0, \ldots, 0, 0),\\
&\alpha_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0),\\
&\alpha_2 = (1, 1, \ldots, 0, 0),\\
&\ldots,\\
&\alpha_{n-1} = (1, 1, \ldots, 1, 0),\\
&\alpha_n = (1, 1, \ldots, 1, 1).
\end{aligned}$$

Ее длина равна $n+1$.

Цепи большей длины не найти, так как наименьший и наибольший ее элементы не могут отличаться более, чем в $n$ координатах. $\square$

# Разбиение булева куба на антицепи

По теореме 2 куб $B^n$ можно разбить на $(n+1)$ антицепь.

Более того, в доказательстве этой теоремы показано, как построить такое разбиение на антицепи.

Далее мы увидим, что каждая из получающихся антицепей называется **слоем** куба.

# Слой булева куба

$k$**-м слоем** $n$-мерного булева куба $B^n$ называется множество $B_k^n$, состоящее из всех наборов с $k$ единицами, $0 \le k \le n$.

**Например**, второй слой в кубе $B^3$ это множество $B_2^3 = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$.

**Теорема 6**. *При* $n \ge 1$ *и* $0 \le k \le n$ *верно* $|B_k^n| = C_n^k$.

**Доказательство**. Слой $B_k^n$ состоит из наборов с $k$ единицами. Если выбрать координаты $i_1, \ldots, i_k$, в которых будут стоять единицы, то в остальных координатах будут стоять нули. Поэтому число элементов слоя $B_k^n$ равно числу сочетаний $C_n^k$. $\square$

## Разбиение булева куба на слои

**Пример 2**. Рассмотрим разбиение куба $B^3$ на слои:

$$\begin{aligned}
B^3_3 &: \quad (1,1,1);\\
B^3_2 &: \quad (0,1,1),(1,0,1),(1,1,0);\\
B^3_1 &: \quad (0,0,1),(0,1,0),(1,0,0);\\
B^3_0 &: \quad (0,0,0).
\end{aligned}$$

# Свойства слоев булева куба

В каждом слое $B_k^n$ ровно $C_n^k$ элементов.

По свойствам биномиальных коэффициентов при фиксированном $n$ последовательность биномиальных коэффициентов $C_n^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, сначала возрастает, достигая своего максимального значения при $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, а потом убывает.

Значит, число элементов в слоях сначала возрастает, а потом убывает. При этом своего максимального значения оно достигает на слое $B^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, который называется **средним слоем** куба $B^n$.

Теперь можно привести такую содержательную интерпретацию теоремы об асимптотике суммы биномиальных коэффициентов: "почти" все точки булева куба $B^n$ (при достаточно больших $n$) сосредоточены в слоях, близких к среднему.

# Антицепи в булевом кубе

Для каждого $k$, $0 \leq k \leq n$, слой $B_k^n$ является антицепью в кубе $B^n$ (почему?).

Значит, средний слой $B^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ является антицепью ширины $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Дальше мы увидим, что это максимальная ширина среди антицепей куба $B^n$.

# Ширина булева куба

**Теорема 7**. *При $n \geq 1$ ширина $n$-мерного булева куба $B^n$ равна* $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

**Доказательство**. Подсчитаем число цепей длины $n+1$ с наименьшим набором $\alpha_0 = (0, \ldots, 0)$ и наибольшим набором $\alpha_n = (1, \ldots, 1)$ (будем их называть **максимальными цепями**).

$1, \ldots, \quad, i_2, \quad, \ldots, \quad, i_1, \quad, \ldots, n$ – координаты

$(0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 0) = \alpha_0,$

$(0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = \alpha_1,$

$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = \alpha_2,$

$\ldots,$

Каждой такой цепи однозначно соответствует перестановка $n$ координат $i_1, i_2, \ldots, i_n$, в которой индекс $i_k$ означает, что $k$-й набор получен из предыдущего заменой нуля в $i_k$-й координате на единицу.

Поэтому число таких цепей равно $P(n, n) = n!$.

# Ширина булева куба

**Доказательство** (продолжение). Пусть $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in B_k^n$ – набор $k$-го слоя булева куба.
Подсчитаем число цепей длины $n+1$ с наименьшим набором $\alpha_0 = (0, \dots, 0)$, наибольшим набором $\alpha_n = (1, \dots, 1)$ и проходящих через набор $\alpha$. Не ограничивая общности, пусть $\alpha = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. Тогда

$1, \dots, k, \quad , \dots, n$ – координаты

$(\underbrace{0, \dots, 0}, 0, \dots, 0)$ – нулевой набор,

здесь $k!$ цепей

$(\overbrace{1, \dots, 1}, \underbrace{0, \dots, 0})$ – набор $\alpha$,

здесь $(n-k)!$ цепей

$(1, \dots, 1, \overbrace{1, \dots, 1})$ – единичный набор

Т.е. всего таких цепей $P(k,k) \cdot P(n-k, n-k) = k!(n-k)!$.

# Ширина булева куба

**Доказательство** (продолжение). Пусть теперь
$D = \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\} \subseteq B^n$ – антицепь в кубе $B^n$, где
$\alpha_j \in B^n_{k_j}, j = 1, \dots, d$.
Рассмотрим все цепи длины $n+1$, проходящие через наборы
$\alpha_1, \dots, \alpha_d$.
Понятно, что ни одна цепь не может проходить через какие-то два набора множества $D$ (Почему?).
Поэтому, что цепей длины $n+1$, проходящих через наборы
$\alpha_1, \dots, \alpha_d$, в точности $\sum\limits_{j=1}^{d} k_j!(n-k_j)!$.
Т.к. это могут быть не все цепи длины $n+1$, получаем
неравенство: $\sum\limits_{j=1}^{d} k_j!(n-k_j)! \leq n!$.

# Ширина булева куба

**Доказательство** (продолжение). Теперь, пользуясь свойством, что $C_n^k \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ для всех $0 \leq k \leq n$, проводим рассуждения:

$$1 \geq \sum_{j=1}^{d} \frac{k_j!(n-k_j)!}{n!} = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{C_n^{k_j}} \geq d \cdot \frac{1}{C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}.$$

Значит, $d \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Т.е. ширина каждой антицепи в кубе $B^n$ не превосходит $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Существование антицепи ширины $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ мы уже доказали – это слой $B^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

$\square$

# Максимальные антицепи булева куба

Верна следующая теорема о структуре максимальных антицепей в кубе $B^n$.

**Теорема 8**. *При $n \geq 1$ в кубе $B^n$*

*при четном $n$ есть только одна максимальная антицепь – слой $B^n_{\frac{n}{2}}$;*

*при нечетном $n$ есть только две максимальные антицепи – слои $B^n_{\frac{n-1}{2}}$ и $B^n_{\frac{n+1}{2}}$.*

# Разбиение булева куба на антицепи

По теореме Дилуорса куб $B^n$ можно разбить на $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ цепей.

А как устроены эти цепи?

Об этом поговорим на следующей лекции.

# Булеан

Пусть $A$ – конечное множество. **Булеаном** множества $A$ называется ЧУМ всех его подмножеств с отношением вложенности $\subseteq$.

Булеан обозначается $B(A)$.

**Например**, если $A = \{1, 2, 3\}$, то
$B(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Оказывается, для булеана верны те же свойства, что и для булева куба.

# Изоморфизм ЧУМ

Два ЧУМ $(A; \leq)$ и $(B; \subseteq)$ называются **изоморфными**, если найдется взаимно-однозначное отображение между элементами этих множеств, сохраняющее порядок, т.е. $\exists \varphi : A \to B$, $\varphi$ – взаимно однозначное, такое что

$$\forall x, y \in A \ \ (x \leq y) \Leftrightarrow (\varphi(x) \subseteq \varphi(y)).$$

Изоморфные ЧУМ **неотличимы** как частично упорядоченные множества.

**Теорема 9**. *Если $|A| = n$, то булеан $B(A)$ и булев куб $B^n$ изоморфны как ЧУМ.*

**Доказательство** проведите самостоятельно.

# Неизоморфизм порядков целых и рациональных чисел

Рассмотрим счетно бесконечные ЧУМ $(\mathbb{Z}; \leq)$ целых и $(\mathbb{Q}; \leq)$ рациональных чисел с отношением обычного сравнения чисел.

Докажите, что эти ЧУМ не изоморфны.

## Задачи для самостоятельного решения

**1**. Построить куб $B^4$.

**2**. Найти в кубе $B^4$
1) все цепи длины 2, проходящие через набор $\alpha = (0,\ 0,\ 1,\ 1)$;
2) все антицепи ширины 3, содержащие набор $\alpha = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$.

**3**. [2] Гл. I, с. 15-21, 1.3-1.5.

**4**. Доказать теорему 9.

**5**. Доказать неизоморфность ЧУМ $(\mathbb{Z}, \leq)$ и $(\mathbb{Q}, \leq)$.

# Литература к лекции 3

1. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2001.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

Конец лекции 3