Модели вычислений

В.А. Захаров

Лекция 10.

1. Конечные автоматы-преобразователи
2. Рациональные отношения и их свойства
3. Алгоритмические проблемы для автоматов-преобразователей
4. Детерминированные автоматы-преобразователи

АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Автоматы могут не только распознавать языки, но и преобразовывать слова одного языка в слова другого.

АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Автоматы могут не только распознавать языки, но и преобразовывать слова одного языка в слова другого.

АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Автоматы могут не только распознавать языки, но и преобразовывать слова одного языка в слова другого.

АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Автоматы могут не только распознавать языки, но и преобразовывать слова одного языка в слова другого.

Для моделирования управляющих систем вполне подходят автоматы Мура и Миля, схемы из функциональных элементов с задержкой и пр.

АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Но эти автоматные модели пригодны не для всех задач. Попробуем создать устройство озвучивания текста. Оно должно выполнять транскрипцию текста, т.е. преобразовывать слова в последовательности фонем.

Например, «this phrase» $\Longrightarrow$ ðisfreiz .

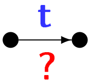
Представим себе работу воображаемого автомата.

АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Но эти автоматные модели пригодны не для всех задач. Попробуем создать устройство озвучивания текста. Оно должно выполнять транскрипцию текста, т.е. преобразовывать слова в последовательности фонем.

Например, «this phrase» $\Longrightarrow$ ðisfreiz .

Представим себе работу воображаемого автомата.

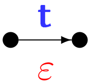


АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Но эти автоматные модели пригодны не для всех задач. Попробуем создать устройство озвучивания текста. Оно должно выполнять транскрипцию текста, т.е. преобразовывать слова в последовательности фонем.

Например, «this phrase» $\Longrightarrow$ ðisfreiz .

Представим себе работу воображаемого автомата.

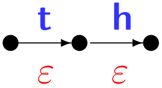


АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Но эти автоматные модели пригодны не для всех задач. Попробуем создать устройство озвучивания текста. Оно должно выполнять транскрипцию текста, т.е. преобразовывать слова в последовательности фонем.

Например, «this phrase» $\Longrightarrow$ ðisfreiz .

Представим себе работу воображаемого автомата.

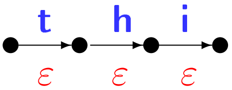


АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Но эти автоматные модели пригодны не для всех задач. Попробуем создать устройство озвучивания текста. Оно должно выполнять транскрипцию текста, т.е. преобразовывать слова в последовательности фонем.

Например, «this phrase» $\Longrightarrow$ ðisfreiz .

Представим себе работу воображаемого автомата.

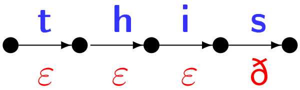


АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Но эти автоматные модели пригодны не для всех задач. Попробуем создать устройство озвучивания текста. Оно должно выполнять транскрипцию текста, т.е. преобразовывать слова в последовательности фонем.

Например, «this phrase» $\Longrightarrow$ ðisfreiz .

Представим себе работу воображаемого автомата.



АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Но эти автоматные модели пригодны не для всех задач. Попробуем создать устройство озвучивания текста. Оно должно выполнять транскрипцию текста, т.е. преобразовывать слова в последовательности фонем.

Например, «this phrase» $\Longrightarrow$ ðisfreiz .

Представим себе работу воображаемого автомата.

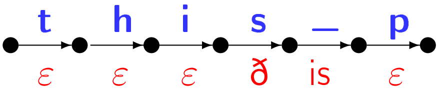
$$\bullet \xrightarrow[\varepsilon]{\mathbf{t}} \bullet \xrightarrow[\varepsilon]{\mathbf{h}} \bullet \xrightarrow[\varepsilon]{\mathbf{i}} \bullet \xrightarrow[\text{ð}]{\mathbf{s}} \bullet \xrightarrow[\text{is}]{\_} \bullet$$

АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Но эти автоматные модели пригодны не для всех задач. Попробуем создать устройство озвучивания текста. Оно должно выполнять транскрипцию текста, т.е. преобразовывать слова в последовательности фонем.

Например, «this phrase» $\Longrightarrow$ ðisfreiz .

Представим себе работу воображаемого автомата.

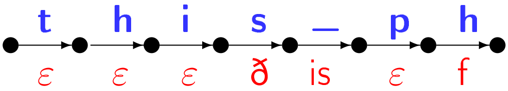


АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Но эти автоматные модели пригодны не для всех задач. Попробуем создать устройство озвучивания текста. Оно должно выполнять транскрипцию текста, т.е. преобразовывать слова в последовательности фонем.

Например, «this phrase» $\Longrightarrow$ ðisfreiz .

Представим себе работу воображаемого автомата.

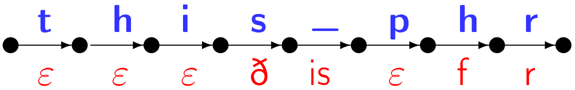


АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Но эти автоматные модели пригодны не для всех задач. Попробуем создать устройство озвучивания текста. Оно должно выполнять транскрипцию текста, т.е. преобразовывать слова в последовательности фонем.

Например, «this phrase» $\Longrightarrow$ ðisfreiz .

Представим себе работу воображаемого автомата.



АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Но эти автоматные модели пригодны не для всех задач. Попробуем создать устройство озвучивания текста. Оно должно выполнять транскрипцию текста, т.е. преобразовывать слова в последовательности фонем.

Например, «this phrase» $\Longrightarrow$ ðisfreiz .

Представим себе работу воображаемого автомата.

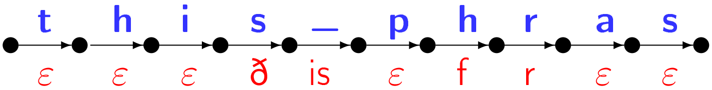
$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\mathbf{t}", "\varepsilon"'] & \bullet \arrow[r, "\mathbf{h}", "\varepsilon"'] & \bullet \arrow[r, "\mathbf{i}", "\varepsilon"'] & \bullet \arrow[r, "\mathbf{s}", "\text{ð}"'] & \bullet \arrow[r, "_", "\text{is}"'] & \bullet \arrow[r, "\mathbf{p}", "\varepsilon"'] & \bullet \arrow[r, "\mathbf{h}", "\text{f}"'] & \bullet \arrow[r, "\mathbf{r}", "\text{r}"'] & \bullet \arrow[r, "\mathbf{a}", "\varepsilon"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Но эти автоматные модели пригодны не для всех задач. Попробуем создать устройство озвучивания текста. Оно должно выполнять транскрипцию текста, т.е. преобразовывать слова в последовательности фонем.

Например, «this phrase» $\Longrightarrow$ ðisfreiz .

Представим себе работу воображаемого автомата.

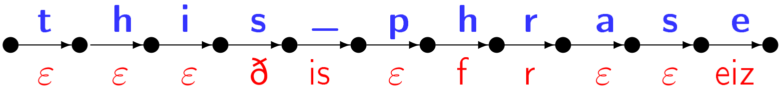


АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Но эти автоматные модели пригодны не для всех задач. Попробуем создать устройство озвучивания текста. Оно должно выполнять транскрипцию текста, т.е. преобразовывать слова в последовательности фонем.

Например, «this phrase» $\Longrightarrow$ ðisfreiz .

Представим себе работу воображаемого автомата.

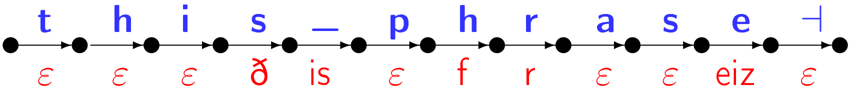


АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Но эти автоматные модели пригодны не для всех задач. Попробуем создать устройство озвучивания текста. Оно должно выполнять транскрипцию текста, т.е. преобразовывать слова в последовательности фонем.

Например, «this phrase» $\Longrightarrow$ ðisfreiz .

Представим себе работу воображаемого автомата.



АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Формально, конечный автомат-преобразователь — это система $\mathcal{A} = (\Sigma, \Delta, S, I, F, T)$, где

- Σ — конечный входной алфавит ;
- Δ — конечный выходной алфавит ;
- S — конечное множество состояний ;
- I — множество начальных состояний , $I \subseteq S$;
- F — множество финальных состояний , $F \subseteq S$;
- T — отношение переходов ,
  $T \subseteq S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times S \times \Delta^*$.

АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Четверки (s', x, s'', β) из отношения переходов T будем называть переходами и изображать их записями вида $s' \xrightarrow{x,\beta} s''$.

Вычислением автомата $\mathcal{A}$ из состояния s_0 в состояние s_n называется любая конечная (в т.ч. пустая) последовательность переходов

$$run = s_0 \xrightarrow{x_1,\beta_1} s_1 \xrightarrow{x_2,\beta_2} \dots \xrightarrow{x_n,\beta_n} s_n \ .$$

Будем говорить, что вычисление run транслирует слово $w = x_1 x_2 \dots x_n$ в слово $\alpha = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$, и условимся обозначать это вычисление записью $s_0 \xrightarrow{w,\alpha}_* s_n$.

АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

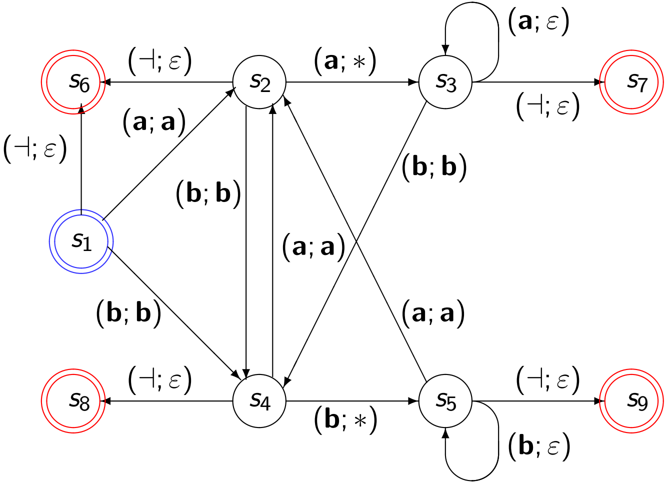
Конечный автомат-преобразователь $\mathcal{A} = (\Sigma, \Delta, S, I, F, T)$ реализует отношение $R(\mathcal{A}) \subseteq \Sigma^* \times \Delta^*$

$$R(\mathcal{A}) = \{(w, \alpha) : s_0 \xrightarrow{w,\alpha}_* s_n, s_0 \in I, s_n \in F\}$$

Отношение $R \subseteq \Sigma^* \times \Delta^*$ называется рациональным отношением над алфавитами Σ, Δ , если существует конечный автомат-преобразователь, реализующий это отношение, т.е. $R = R(\mathcal{A})$.

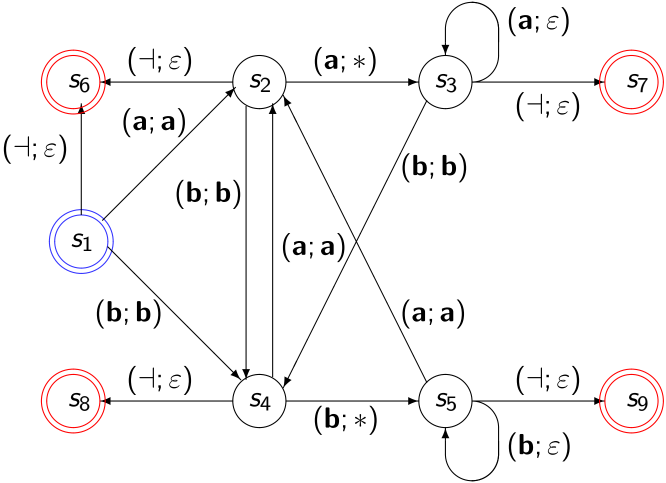
АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Автомат-преобразователь слов в шаблоны



АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

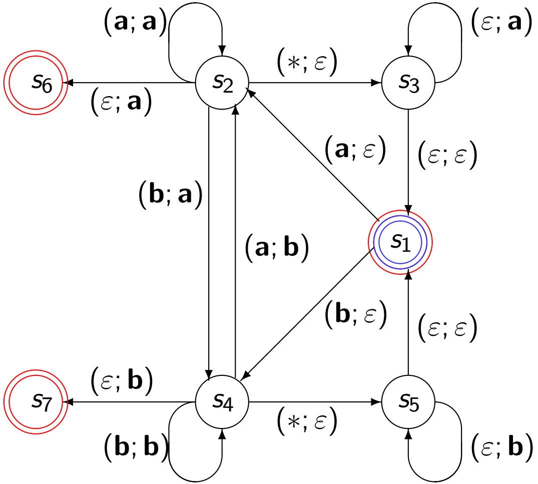
Автомат-преобразователь слов в шаблоны



$aaabbabaaabbba \dashv \; \Rightarrow \; a * b * aba * b * a$

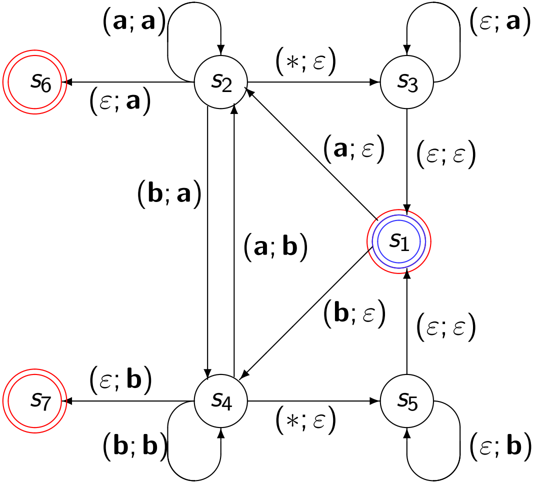
АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Автомат-преобразователь шаблонов в слова



АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Автомат-преобразователь шаблонов в слова



$aa * b * b * aa \;\Rightarrow\; aaaabaa$

АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример. Рассмотрим примеры словарных отношений

- $R_{=} = \{(w, w) : w \in \Sigma^*\}$
- $R_{\neq} = \{(w, u) : w, u \in \Sigma^*, u \neq w\}$
- $R_{\times 2} = \{(w, ww) : w \in \Sigma^*\}$
- $R_{rev} = \{(w, w^{-1}) : w \in \Sigma^*\}$

Какие из этих отношений рациональные, а какие — нет?

АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример. Рассмотрим примеры словарных отношений

- $R_{=} = \{(w, w) : w \in \Sigma^*\}$ — рациональное отношение;
- $R_{\neq} = \{(w, u) : w, u \in \Sigma^*, u \neq w\}$ — рациональное отношение;
- $R_{\times 2} = \{(w, ww) : w \in \Sigma^*\}$ — иррациональное отношение;
- $R_{rev} = \{(w, w^{-1}) : w \in \Sigma^*\}$ — иррациональное отношение.

АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример. Рассмотрим примеры словарных отношений

- $R_{=} = \{(w, w) : w \in \Sigma^*\}$ — рациональное отношение;
- $R_{\neq} = \{(w, u) : w, u \in \Sigma^*, u \neq w\}$ — рациональное отношение;
- $R_{\times 2} = \{(w, ww) : w \in \Sigma^*\}$ — иррациональное отношение;
- $R_{rev} = \{(w, w^{-1}) : w \in \Sigma^*\}$ — иррациональное отношение.

А как в этом убедиться?

АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

У нас уже есть опыт и методика.

- Проверить свойства замкнутости класса рациональных отношений.
- Отыскать алгебраический способ описания рациональных отношений и алгоритм трансляции алгебраических описаний в автоматы- преобразователи.
- Обнаружить аналог теоремы о разрастании языков.
- Разработать алгоритмы проверки эквивалентности и минимизации автоматов-преобразователи.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Для всякого отношения $R, R \subseteq \Sigma^* \times \Delta^*$, его областью определения будем называть язык $Dom(R) = \{w : \exists\alpha(w, \alpha) \in R\}$, а множеством значений — язык $Range(R) = \{\alpha : \exists w(w, \alpha) \in R\}$.

Рациональные отношения и их свойства

Для всякого отношения $R, R \subseteq \Sigma^* \times \Delta^*$, его областью определения будем называть язык $Dom(R) = \{w : \exists \alpha (w, \alpha) \in R\}$, а множеством значений — язык $Range(R) = \{\alpha : \exists w (w, \alpha) \in R\}$.

Утверждение 10.1. Если R — рациональное отношение над алфавитами Σ, Δ , то его область определения $Dom(R)$ и множество значений $Range(R)$ являются регулярными языками.

Рациональные отношения и их свойства

Для всякого отношения $R, R \subseteq \Sigma^* \times \Delta^*$, его областью определения будем называть язык $Dom(R) = \{w : \exists \alpha (w, \alpha) \in R\}$, а множеством значений — язык $Range(R) = \{\alpha : \exists w (w, \alpha) \in R\}$.

Утверждение 10.1. Если R — рациональное отношение над алфавитами Σ, Δ , то его область определения $Dom(R)$ и множество значений $Range(R)$ являются регулярными языками.

Доказательство. Автомат-преобразователь, реализующий отношение R , легко преобразуется в конечные автоматы, распознающие языки $Dom(R)$ и $Range(R)$. QED

Рациональные отношения и их свойства

Утверждение 10.2. Если R — рациональное отношение над алфавитами Σ, Δ , то язык $L_R = \{w\alpha^{-1} : (w, \alpha) \in R\}$ является КС-языком в алфавите $\Sigma \cup \Delta$.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Утверждение 10.2. Если R — рациональное отношение над алфавитами Σ, Δ , то язык $L_R = \{w\alpha^{-1} : (w, \alpha) \in R\}$ является КС-языком в алфавите $\Sigma \cup \Delta$.

Доказательство. Автомат-преобразователь, реализующий отношение R , легко преобразуется в магазинный автомат, распознающий слова языка L_R : на каждом переходе $s' \xrightarrow{(x,\beta)} s''$ он записывает слово β^{-1} в магазин, и после того, как будет прочтено слово w , продолжает распознавание слова α^{-1} , используя накопленное содержимое магазина. QED

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Таким образом,

отношение $R_{\times 2} = \{(w, ww) : w \in \Sigma^*\}$ не является рациональным, поскольку $Range(R) = \{ww : w \in \Sigma^*\}$ не является регулярным языком;

отношение $R_{rev} = \{(w, w^{-1}) : w \in \Sigma^*\}$ не является рациональным, поскольку $L_{R_{rev}} = \{ww : w \in \Sigma^*\}$ не является КС-языком.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Теорема о накачке тоже имеет место.

Утверждение 10.3. Пусть R — рациональное отношение над алфавитами Σ, Δ . Тогда существует такое положительное целое число N , что для любой пары слов (w, α), $(w, \alpha) \in R$, суммарной длины не менее N существуют такие разбиения этих слов $w = xyz, \alpha = \eta\beta\theta$, где $|xy| \leq N, |\eta\beta| \leq N$ и $y\beta \neq \varepsilon$, для которых включение $(xy^iz, \eta\beta^i\theta) \in R$ верно для всех $i, i \geq 0$.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Теорема о накачке тоже имеет место.

Утверждение 10.3. Пусть R — рациональное отношение над алфавитами Σ, Δ . Тогда существует такое положительное целое число N , что для любой пары слов (w, α), $(w, \alpha) \in R$, суммарной длины не менее N существуют такие разбиения этих слов $w = xyz, \alpha = \eta\beta\theta$, где $|xy| \le N, |\eta\beta| \le N$ и $y\beta \ne \varepsilon$, для которых включение $(xy^iz, \eta\beta^i\theta){\in}R$ верно для всех $i, i{\ge}0$.

Доказательство. Совершенно аналогично доказательству теоремы о разрастании для автоматных языков QED

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Для словарных отношений можно определять разнообразные операции.

Конкатенацией отношений P, Q над алфавитами Σ, Δ называется такое словарное отношение $R = PQ$ над теми же алфавитами, которое определяется соотношением

$$\begin{aligned} R = \ & \{(w, \alpha) : \ w = w_1 w_2, \alpha = \alpha_1 \alpha_2, \\ & (w_1, \alpha_1) \in P, (w_2, \alpha_2) \in Q\}. \end{aligned}$$

Итерация отношения P определяется так:

$$P^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} P^k \ .$$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Композицией отношений P, Q над алфавитами Σ, Δ и Δ, Γ соответственно называется такое словарное отношение $R = P \circ Q$ над алфавитами Σ, Γ , которое определяется соотношением

$$R = \{(w, u) : \exists \alpha((w, \alpha) \in P \ \wedge \ (\alpha, u) \in Q)\}.$$

Объединение, пересечение и дополнение словарных отношений вводятся обычным образом.

Рациональные отношения и их свойства

Утверждение 10.4. Класс рациональных отношений замкнут относительно операций объединения, конкатенации, итерации и композиции.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Утверждение 10.4. Класс рациональных отношений замкнут относительно операций объединения, конкатенации, итерации и композиции.

Доказательство. Совершенно аналогично доказательству теоремы о замкнутости класса автоматных языков. Замкнутость относительно операции композиции доказать самостоятельно .
QED

Рациональные отношения и их свойства

А есть ли замкнутость рациональных отношений относительно пересечения?

Рациональные отношения и их свойства

А есть ли замкнутость рациональных отношений относительно пересечения? Увы, ее нет!

Утверждение 10.5. Класс рациональных отношений не замкнут относительно операций пересечения и дополнения.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

А есть ли замкнутость рациональных отношений относительно пересечения? Увы, ее нет!

Утверждение 10.5. Класс рациональных отношений не замкнут относительно операций пересечения и дополнения.

Доказательство. Рассмотрим словарные отношения $P = \{(a^n b^m, c^n) : m, n \geq 0\}$ и $Q = \{(a^m b^n, c^n) : m, n \geq 0\}$. Нетрудно построить автоматы-преобразователи, реализующие эти отношения. Однако их пересечение $P \cap Q = \{(a^n b^n, c^n) : n \geq 0\}$ очевидно не является рациональным отношением. QED

Рациональные отношения и их свойства

Рациональные отношения можно задавать при помощи регулярных выражений:

- константами объявляются все пары $(x, \varepsilon), x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, и $(\varepsilon, y), y \in \Delta \cup \{\varepsilon\}$;
- если P_1 и P_2 — регулярные выражения, то $(P_1 + P_2)$, $(P_1 \cdot P_2)$ и (P_1^*) — также регулярные выражения.

Значение $R(P)$ регулярного выражения P определяется на основании операций объединения, конкатенации и итерации для словарных отношений так же, как и для языков.

Рациональные отношения и их свойства

Для введенных таким образом регулярных выражений справедлив аналог теоремы Клини.

Утверждение 10.6. Словарное отношение является регулярным тогда и только тогда, когда оно является рациональным.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Для введенных таким образом регулярных выражений справедлив аналог теоремы Клини.

Утверждение 10.6. Словарное отношение является регулярным тогда и только тогда, когда оно является рациональным.

Доказательство. Проводится аналогично доказательству теоремы Клини для конечных автоматов-распознавателей. QED

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Пример. Словарное отношение $R_{\neq} = \{(w, u) : w, u \in \Sigma^*, u \neq w\}$ является рациональным.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Пример. Словарное отношение $R_{\neq} = \{(w,u) : w,u \in \Sigma^*, u \neq w\}$ является рациональным.

Доказательство. Для любой пары букв x, y будем использовать запись (x,y) для обозначения регулярного выражения $(x,\varepsilon)\cdot(\varepsilon,y)$. Тогда $R_{\neq} = R(F_1 + F_2 + F_3)$, где

- $F_1 = (\sum_{x\in\Sigma}(x,x))^* \cdot (\sum_{x\neq y}(x,y)) \cdot (\sum_{x,y\in\Sigma}(x,y))^*$,
- $F_2 = (\sum_{x,y\in\Sigma}(x,y))^* \cdot (\sum_{x\in\Sigma}(x,\varepsilon)) \cdot (\sum_{x\in\Sigma}(x,\varepsilon))^*$,
- $F_3 = (\sum_{x,y\in\Sigma}(x,y))^* \cdot (\sum_{y\in\Sigma}(\varepsilon,y)) \cdot (\sum_{y\in\Sigma}(\varepsilon,y))^*$.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Задача 1. Разработать алгоритм, который для автоматов-преобразователей, реализующих отношения R_1 и R_2 , строит автомат, реализующий их композицию $R_1 \circ R_2$. Какова оценка размера этого автомата?

Задача 2. Верно ли, что всякое словарное отношение P , которое удовлетворяет условиям

1. $Dom(P)$ и $Range(P)$ — регулярные языки,
2. $L = \{wu^{-1} : (w, u) \in P\}$ — КС-язык

является рациональным.

Рациональные отношения и их свойства

Задача 3. Верно ли, что для любого рационального отношения R , словарное отношение $R^{-1} = \{(u, w) : (w, u) \in R\}$ также является рациональным?

Задача 4. Верно ли, что для любого рационального отношения R , словарное отношение $R^{rev} = \{(w^{-1}, u^{-1}) : (w, u) \in R\}$ также является рациональным?

Алгоритмические проблемы

А как обстоит дело с алгоритмическими проблемами?

Алгоритмические проблемы

А как обстоит дело с алгоритмическими проблемами?

Очевидно, что проблема пустоты для рациональных отношений $R(\mathcal{A}) = \varnothing$? разрешима. Почему?

Алгоритмические проблемы

А как обстоит дело с алгоритмическими проблемами?

Очевидно, что проблема пустоты для рациональных отношений $R(\mathcal{A}) = \varnothing$? разрешима. Почему?

Иначе обстоит дело с другими задачами.

Утверждение 10.7. Проблема тотальности для рациональных отношений $R(\mathcal{A}) = \Sigma^* \times \Delta^*$? алгоритмически неразрешима.

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Доказательство. Покажем, что Проблема соответствий Поста (ПСП) сводима к проблеме тотальности рациональных отношений.

Пусть задана система пар слов $\mathcal{P} = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_k, v_k)\}$ в алфавите Δ . Для этой системы определим два отношения над алфавитами $\Sigma = \{1, 2, \ldots, k\}$ и Δ :

$$\begin{aligned} R^1_{\mathcal{P}} &= \{(i_1 i_2 \ldots i_n, u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_n}) : n \geq 1\}, \\ R^2_{\mathcal{P}} &= \{(j_1 j_2 \ldots j_m, v_{j_1} v_{j_2} \ldots v_{j_m}) : m \geq 1\}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что оба эти отношения — рациональные.

Алгоритмические проблемы

Значит, рациональным является и отношение

$$R_{\mathcal{P}} = (R^1_{\mathcal{P}} \circ R_{\neq}) + (R^2_{\mathcal{P}} \circ R_{\neq}).$$

Алгоритмические проблемы

Значит, рациональным является и отношение

$$R_{\mathcal{P}} = (R_{\mathcal{P}}^1 \circ R_{\neq}) + (R_{\mathcal{P}}^2 \circ R_{\neq}).$$

Но тогда ПСП для $\mathcal{P}$ имеет решение $i_1, i_2, \ldots, i_n$

Алгоритмические проблемы

Значит, рациональным является и отношение

$$R_{\mathcal{P}} = (R^1_{\mathcal{P}} \circ R_{\neq}) + (R^2_{\mathcal{P}} \circ R_{\neq}).$$

Но тогда ПСП для $\mathcal{P}$ имеет решение $i_1, i_2, \ldots, i_n$

$$\Longleftrightarrow$$

$u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_n} = v_{i_1} v_{i_1} \ldots v_{i_n} = w$

Алгоритмические проблемы

Значит, рациональным является и отношение

$$R_{\mathcal{P}} = (R^1_{\mathcal{P}} \circ R_{\neq}) + (R^2_{\mathcal{P}} \circ R_{\neq}).$$

Но тогда ПСП для $\mathcal{P}$ имеет решение $i_1, i_2, \ldots, i_n$

$$\Longleftrightarrow$$

$$u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_n} = v_{i_1} v_{i_1} \ldots v_{i_n} = w$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(i_1 i_2 \ldots i_n, w) \notin R^1_{\mathcal{P}} \circ R_{\neq}, \ (i_1 i_2 \ldots i_n, w) \notin R^2_{\mathcal{P}} \circ R_{\neq}$$

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Значит, рациональным является и отношение

$$R_{\mathcal{P}} = (R^1_{\mathcal{P}} \circ R_{\neq}) + (R^2_{\mathcal{P}} \circ R_{\neq}).$$

Но тогда ПСП для $\mathcal{P}$ имеет решение $i_1, i_2, \dots, i_n$

$$\Longleftrightarrow$$

$$u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_n} = v_{i_1} v_{i_1} \dots v_{i_n} = w$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(i_1 i_2 \dots i_n, w) \notin R^1_{\mathcal{P}} \circ R_{\neq}, \; (i_1 i_2 \dots i_n, w) \notin R^2_{\mathcal{P}} \circ R_{\neq}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$R_{\mathcal{P}} \neq \Sigma^* \times \Delta^*$. QED

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Следствие. Проблема эквивалентности для конечных автоматов-преобразователей алгоритмически неразрешима.

Это обстоятельство сильно затрудняет оптимизацию автоматов-преобразователей.

Задача 5. Является ли алгоритмически разрешимой проблема включения $(w, u) \in R(\mathcal{A})$ для конечных автоматов-преобразователей?

Задача 6. Является ли алгоритмически разрешимой проблема пустоты пересечения $R(\mathcal{A}) \cap R(\mathcal{B}) = \varnothing$ для конечных автоматов-преобразователей?

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Следствие. Проблема эквивалентности для конечных автоматов-преобразователей алгоритмически неразрешима.

Это обстоятельство сильно затрудняет оптимизацию автоматов-преобразователей.

Задача 5. Является ли алгоритмически разрешимой проблема включения $(w, u) \in R(\mathcal{A})$ для конечных автоматов-преобразователей?

Задача 6. Является ли алгоритмически разрешимой проблема пустоты пересечения $R(\mathcal{A}) \cap R(\mathcal{B}) = \varnothing$ для конечных автоматов-преобразователей?

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

А как обстоит дело с алгоритмическими проблемами для **детерминированных** автоматов-преобразователей?

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

А как обстоит дело с алгоритмическими проблемами для **детерминированных** автоматов-преобразователей?

Конечный автомат-преобразователь $\mathcal{A} = (\Sigma, \Delta, S, I, F, T)$ называется детерминированным , если он удовлетворяет следующим требованиям:

- $|I| \leq 1$, т.е. имеет не более одного начального состояния;
- отношение переходов T является функцией $T : S \times \Sigma \to S \times \Delta^*$.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

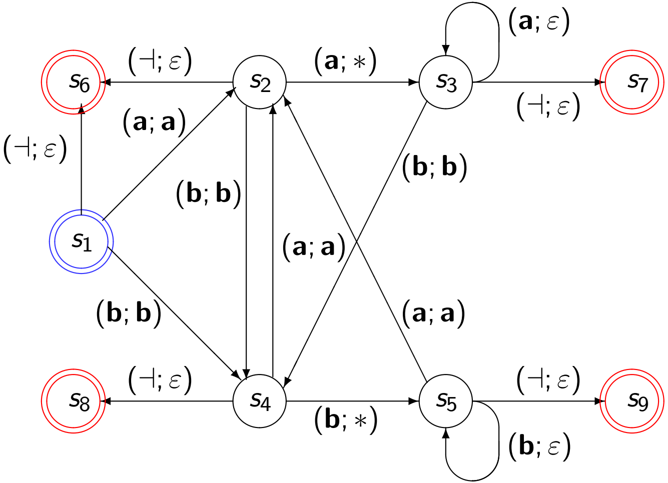
Детерминированный автомат должен знать, где оканчивается транслируемое слово. Поэтому к входному алфавиту Σ прилагается специальный маркер конца слова $\dashv$.

Детерминированный автомат-преобразователь $\mathcal{A} = (\Sigma, \Delta, S, I, F, T)$ реализует частичную функцию $R_{\mathcal{A}} : \Sigma^* \to \Delta^*$, значение которой для каждого входного слова w определяется соотношением

$$R_{\mathcal{A}}(w) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad s_0 \xrightarrow{(w\dashv,\alpha)}_* s_n, s_0 \in I, s_n \in F.$$

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Детерминированный автомат-преобразователь



ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Теорема 10.8. Проблема эквивалентности $R_{\mathcal{A}_1} = R_{\mathcal{A}_2}$? для детерминированных конечных автоматов-преобразователей разрешима.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Теорема 10.8. Проблема эквивалентности $R_{\mathcal{A}_1} = R_{\mathcal{A}_2}$? для детерминированных конечных автоматов-преобразователей разрешима.

Доказательство. Рассмотрим автоматы-преобразователи $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, удовлетворяющие условиям

1. $Dom(R_{\mathcal{A}_1}) = Dom(R_{\mathcal{A}_2})$
   (иначе $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ очевидно неэквивалентны);
2. $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ не имеют бесполезных состояний
   (эти состояния можно обнаружить и удалить).

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

ИДЕЯ АЛГОРИТМА.

Для каждого состояния s каждого из автоматов-преобразователей $\mathcal{A}_i, i = 1, 2,$ введем переменную X_s и составим систему алгебраических уравнений, описывающую функции трансляции, которые реализуются в каждом состоянии этих автоматов-преобразователей.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

ИДЕЯ АЛГОРИТМА.

Для каждого состояния s каждого из автоматов-преобразователей $\mathcal{A}_i, i = 1, 2,$ введем переменную X_s и составим систему алгебраических уравнений, описывающую функции трансляции, которые реализуются в каждом состоянии этих автоматов-преобразователей.

Добавим к этой системе уравнение $X_{s_1^1} = X_{s_1^2}$, где s_1^1, s_1^2 — начальные состояния автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, и проверим разрешимость полученной системы уравнений методом исключения переменных, как это делается в линейной алгебре.

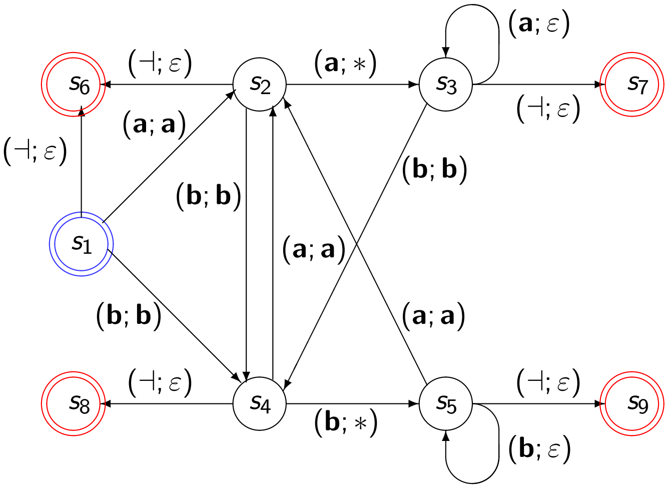
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пусть имеется детерминированный автомат-преобразователь $\mathcal{A} = (\Sigma, \Delta, S, \{s_1\}, F, T)$ с функцией переходов $T : S \times \Sigma \to S \times \Delta^*$.
Тогда для каждого состояния $s \in S$ сформируем множество троек $Out(\mathcal{A}, s) = \{(x, s', \beta) : T(s, x) = (s', \beta), x \in \Sigma, s' \in S, \beta \in \Delta^*\}$ и построим уравнение

$$Eq(\mathcal{A}, s) \quad : \quad X_s = \sum_{(x,s',\beta)\in Out(\mathcal{A},s)} (x, \beta) \cdot X_{s'} + c_s,$$

где $c_s = \begin{cases} (\varepsilon, \varepsilon), & \text{если } s \in F, \\ \mathbf{0}, & \text{если } s \notin F. \end{cases}$

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ



$$X_{s_1} = (\dashv, \varepsilon) \cdot X_{s_6} + (\mathbf{a}; \mathbf{a}) \cdot X_{s_2} + (\mathbf{b}; \mathbf{b}) \cdot X_{s_4},$$

$$X_{s_2} = (\dashv, \varepsilon) \cdot X_{s_6} + (\mathbf{a}; *) \cdot X_{s_3} + (\mathbf{b}; \mathbf{b}) \cdot X_{s_4}, \qquad \ldots \qquad X_{s_6} = (\varepsilon, \varepsilon)$$

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Преобразователь $\mathcal{A} = (\Sigma, \Delta, S, \{s_1\}, F, T)$ можно описать системой уравнений

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = \{Eq(\mathcal{A}, s) \ : \ s \in S\}.$$

Лемма 1.

Для любого детерминированного преобразователя $\mathcal{A}$ система уравнений $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ имеет единственное решение $X_s = \{(w, \alpha) \ : \ s \xrightarrow{w,\alpha}_* s_n, s_n \in F\}, \ s \in S$.

Доказательство.

Индукцией по длине входного слова w для всех состояний $s \in S$.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Следствие.

Преобразователи $\mathcal{A}_1 = (\Sigma, \Delta, S_1, \{s_1^1\}, F_1, T_1)$ и $\mathcal{A}_2 = (\Sigma, \Delta, S_2, \{s_1^2\}, F_2, T_2)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда имеет решение система уравнений

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}_1} \cup \mathcal{E}_{\mathcal{A}_2} \cup \{X_{s_1^1} = X_{s_1^2}\}$$

Таким образом для проверки эквивалентности преобразователей нужно научиться проверять разрешимость систем линейных уравнений указанного вида.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Будем рассматривать системы уравнений вида

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cup \{(\varepsilon, \beta_1') \cdot X_{i_1} = (\varepsilon, \beta_1'') \cdot X_{j_1}, \dots, (\varepsilon, \beta_k') \cdot X_{i_k} = (\varepsilon, \beta_k'') \cdot X_{j_k}\},$$

где $\mathcal{A}$ — детерминированный преобразователь, $\beta_i', \beta_j'' \in \Delta^*$. Некоторые из таких систем наверняка имеют решение.

Лемма 2.

Если переменные $X_{j_1}, \dots, X_{j_k}$ содержатся в уравнениях системы $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, а попарно различные переменные $Y_1, \dots, Y_k$ не содержатся в уравнениях системы $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, то система уравнений

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cup \{Y_1 = (\varepsilon, \beta_1) \cdot X_{j_1}, \dots, Y_k = (\varepsilon, \beta_k) \cdot X_{j_k}\}$$

имеет решение.

Доказательство.

Согласно Лемме 1 система уравнений $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ имеет решение $X_1 = R_1, \dots, X_n = R_n$, а значения переменных $Y_1, \dots, Y_k$ вычисляются однозначно по значениям $X_{j_1}, \dots, X_{j_k}$. QED

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Но есть также и такие системы уравнений, которые не имеют решений.

Лемма 3.

Для любого преобразователя $\mathcal{A}$ система уравнений

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cup \{X_i = (\varepsilon, \beta) \cdot X_i\},$$

не имеет решения при $\beta \neq \varepsilon$.

Доказательство.

Согласно Лемме 1 система уравнений $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ имеет решение $X_1 = R_1, \dots, X_n = R_n$. Рассмотрим кратчайшее слово α в множестве слов $Range(R_i)$. Тогда $\beta\alpha$ будет словом наименьшей длины в множестве слов $Range((\varepsilon, \beta) \cdot R_i)$. Тогда из $|\beta\alpha| > |\alpha|$ следует $R_i \neq (\varepsilon, \beta) \cdot R_i$. QED

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Лемма 4.

Для любого преобразователя $\mathcal{A}$ система уравнений

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cup \{(\varepsilon, \beta') \cdot X_i = (\varepsilon, \beta'') \cdot X_j\},$$

не имеет решения в том случае, когда β' не является префиксом β'' , и β'' не является префиксом β' .

Доказательство.

Согласно Лемме 1 система уравнений $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ имеет решение $X_1 = R_1, \dots, X_n = R_n$. Тогда равенство $(\varepsilon, \beta') \cdot R_i = (\varepsilon, \beta'') \cdot R_j$ влечет равенство $\beta' \cdot Range(R_i) = \beta'' \cdot Range(R_j)$. Последнее возможно лишь в том случае, если одно из слов β' или β'' является префиксом другого слова QED

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Для проверки эквивалентности преобразователей $\mathcal{A}_1 = (\Sigma, \Delta, S_1, \{s_1^1\}, F_1, T_1)$ и $\mathcal{A}_2 = (\Sigma, \Delta, S_2, \{s_1^2\}, F_2, T_2)$ будем применять правила равносильных преобразований к исходной системе уравнений

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}_1} \cup \mathcal{E}_{\mathcal{A}_2} \cup \{X_{s_1^1} = X_{s_1^2}\} \qquad (*)$$

до тех пор, пока не получим систему уравнений, которая

- либо удовлетворяет условию Леммы 2 : тогда система уравнений (*) имеет решение , и $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$;
- либо удовлетворяет условию Леммы 3 : тогда система уравнений (*) не имеет решения , и $\mathcal{A}_1 \not\sim \mathcal{A}_2$,
- либо удовлетворяет условию Леммы 4 : тогда система уравнений (*) не имеет решения , и $\mathcal{A}_1 \not\sim \mathcal{A}_2$.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Предположим, что система уравнений

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cup \{(\varepsilon, \beta_1') \cdot X_{i_1} = (\varepsilon, \beta_1'') \cdot X_{j_1}, \ldots, (\varepsilon, \beta_k') \cdot X_{i_k} = (\varepsilon, \beta_k'') \cdot X_{j_k}\},$$

не подпадает под условия Лемм 2, 3, 4. Тогда применим к системе уравнений $\mathcal{E}$ следующие два типа преобразований.

1. Сокращение множителей.

Если в системе $\mathcal{E}$ есть уравнения вида

$$(\varepsilon, \beta) \cdot X_i = (\varepsilon, \beta\gamma) \cdot X_j \quad \text{(или } (\varepsilon, \beta\gamma) \cdot X_i = (\varepsilon, \beta) \cdot X_j \text{),}$$

то заменим каждое из таких уравнений на уравнение

$$X_i = (\varepsilon, \gamma) \cdot Xj \quad \text{(или } X_j = (\varepsilon, \gamma) \cdot X_i \text{).}$$

После «сокращения общих множителей» во всех таких уравнениях получим равносильную систему уравнений $\mathcal{E}'$, в которой левые части уравнений имеют только единичный множитель.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

2. Исключение переменных.

Если в системе $\mathcal{E}$ есть уравнение вида $X_i = (\varepsilon, \beta) \cdot X_j$, и при этом $X_i \neq X_j$, то заменим все прочие вхождения X_i на выражение $(\varepsilon, \beta) \cdot X_j$. Переменная X_i становится, таким образом, **«исключенной»**.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

2. Исключение переменных.
Если в системе $\mathcal{E}$ есть уравнение вида $X_i = (\varepsilon, \beta) \cdot X_j$, и при этом $X_i \neq X_j$, то заменим все прочие вхождения X_i на выражение $(\varepsilon, \beta) \cdot X_j$. Переменная X_i становится, таким образом, **«исключенной»** .

Но при такой замене переменной X_i на $(\varepsilon, \beta) \cdot X_j$ может нарушиться устройство уравнений подсистемы $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$: уравнения

$$\begin{array}{rcl} X_i & = & (a_{i_1}, \beta'_1) \cdot X_{i_1} + \cdots + (a_{i_r}, \beta'_r) \cdot X_i + \cdots + (a_{i_m}, \beta'_m) \cdot X_{i_m}, \\ X_j & = & (a_{j_1}, \beta''_1) \cdot X_{j_1} + \cdots + (a_{j_p}, \beta''_p) \cdot X_i + \cdots + (a_{j_n}, \beta''_n) \cdot X_{j_n} \end{array}$$

примут вид

$$\begin{array}{rcl} (\varepsilon, \beta) X_j & = & (a_{i_1}, \beta'_1) \cdot X'_{i_1} + \cdots + (a_{i_r}, \beta'_r \beta) \cdot X_j + \cdots + (a_{i_m}, \beta'_m) \cdot X'_{i_m}, \\ X_j & = & (a_{j_1}, \beta''_1) \cdot X''_{j_1} + \cdots + (a_{j_p}, \beta''_p \beta) \cdot X_j + \cdots + (a_{j_n}, \beta''_n) \cdot X''_{j_n}. \end{array}$$

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

2. Исключение переменных.

Если в системе $\mathcal{E}$ есть уравнение вида $X_i = (\varepsilon, \beta) \cdot X_j$, и при этом $X_i \neq X_j$, то заменим все прочие вхождения X_i на выражение $(\varepsilon, \beta) \cdot X_j$. Переменная X_i становится, таким образом, **«исключенной»** .

Но при такой замене переменной X_i на $(\varepsilon, \beta) \cdot X_j$ может нарушиться устройство уравнений подсистемы $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$: уравнения

$$\begin{array}{rcl} X_i & = & (a_{i_1}, \beta'_1) \cdot X_{i_1} + \dots + (a_{i_r}, \beta'_r) \cdot X_i + \dots + (a_{i_m}, \beta'_m) \cdot X_{i_m}, \\ X_j & = & (a_{j_1}, \beta''_1) \cdot X_{j_1} + \dots + (a_{j_p}, \beta''_p) \cdot X_i + \dots + (a_{j_n}, \beta''_n) \cdot X_{j_n} \end{array}$$

примут вид

$$\begin{array}{rcl} (\varepsilon, \beta) X_j & = & (a_{i_1}, \beta'_1) \cdot X'_{i_1} + \dots + (a_{i_r}, \beta'_r\beta) \cdot X_j + \dots + (a_{i_m}, \beta'_m) \cdot X'_{i_m}, \\ X_j & = & (a_{j_1}, \beta''_1) \cdot X''_{j_1} + \dots + (a_{j_p}, \beta''_p\beta) \cdot X_j + \dots + (a_{j_n}, \beta''_n) \cdot X''_{j_n}. \end{array}$$

Исправим нарушения устройства этих уравнений.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

3. Исправление уравнений.

Если в подсистеме $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ возникли уравнения с одинаковыми переменными в левых частях:

$$\begin{aligned} (\varepsilon,\beta)X_j &= (a_{i_1},\beta_1')\cdot X_{i_1}' + \cdots + (a_{i_r},\beta_r'\beta)\cdot X_j + \cdots + (a_{i_m},\beta_m')\cdot X_{i_m}', \\ X_j &= (a_{j_1},\beta_1'')\cdot X_{j_1}'' + \cdots + (a_{j_p},\beta_p''\beta)\cdot X_j + \cdots + (a_{j_n},\beta_n'')\cdot X_{j_n}'', \end{aligned}$$

то сравним множества букв

$\Sigma' = \{a_{i_1},\ldots,a_{i_r},\ldots,a_{i_m}\}$ и $\Sigma'' = \{a_{j_1},\ldots,a_{j_p},\ldots,a_{j_n}.\}$.

Возможны два варианта.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

3. Исправление уравнений.
Если в подсистеме $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ возникли уравнения с одинаковыми переменными в левых частях:

$$\begin{aligned}(\varepsilon, \beta)X_j &= (a_{i_1}, \beta_1') \cdot X_{i_1}' + \dots + (a_{i_r}, \beta_r'\beta) \cdot X_j + \dots + (a_{i_m}, \beta_m') \cdot X_{i_m}', \\ X_j &= (a_{j_1}, \beta_1'') \cdot X_{j1}'' + \dots + (a_{j_p}, \beta_p''\beta) \cdot X_j + \dots + (a_{j_n}, \beta_n'') \cdot X_{j_n}'',\end{aligned}$$

то сравним множества букв
$\Sigma' = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}, \dots, a_{i_m}\}$ и $\Sigma'' = \{a_{j1}, \dots, a_{j_p}, \dots, a_{j_n}.\}$.
Возможны два варианта.

Вариант 3.1.
Если $\Sigma' \neq \Sigma''$, то эти два уравнения несовместны, и, следовательно, система, содержащая эти два уравнения, не имеет решений.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

3. Исправление уравнений.

Если в подсистеме $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ возникли уравнения с одинаковыми переменными в левой части:

$$\begin{aligned}(\varepsilon, \beta)X_j &= (a_{i_1}, \beta'_1) \cdot X'_{i_1} + \dots + (a_{i_r}, \beta'_r\beta) \cdot X_j + \dots + (a_{i_m}, \beta'_m) \cdot X'_{i_m}, \\ X_j &= (a_{j_1}, \beta''_1) \cdot X''_{j_1} + \dots + (a_{j_p}, \beta''_p\beta) \cdot X_j + \dots + (a_{j_n}, \beta''_n) \cdot X''_{j_n},\end{aligned}$$

то сравним множества букв

$\Sigma' = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}, \dots, a_{i_m}\}$ и $\Sigma'' = \{a_{j_1}, \dots, a_{j_p}, \dots, a_{j_n}.\}$.

Возможны два варианта.

Вариант 3.2.

Если $\Sigma' = \Sigma''$ (т.е. $a_{i_1} = a_{j_1}, \dots, a_{i_n} = a_{j_m}$), то

- удалим из системы первое из этих двух уравнений,
- добавим в систему новые уравнения:

$$(\varepsilon, \beta'_1) \cdot X'_{i_1} = (\varepsilon, \beta\beta''_1) \cdot X''_{j_1}, \dots, (\varepsilon, \beta'_m) \cdot X'_{i_m} = (\varepsilon, \beta\beta''_n) \cdot X''_{j_n}.$$

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

После **Исправления уравнений** получим равносильную систему уравнений, в которой стало на одну «исключенную» переменную больше.

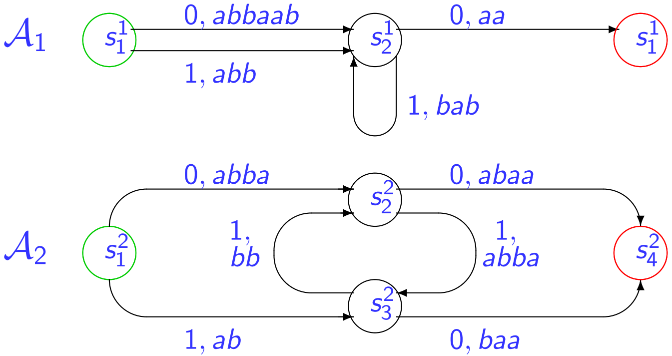
Т.к. в исходной системе было конечное число переменных, и после каждого раунда преобразований количество «исключенных» переменных возрастает, спустя некоторое число раундов

- либо будет получена равносильная система в которой все переменные «исключенные» (здесь применима Лемма 2);
- либо будет обнаружена неразрешимость системы на основании Лемм 3, 4, а также Варианта 3.1.

QED

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

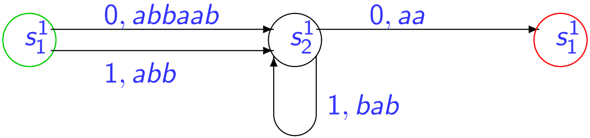
Пример.



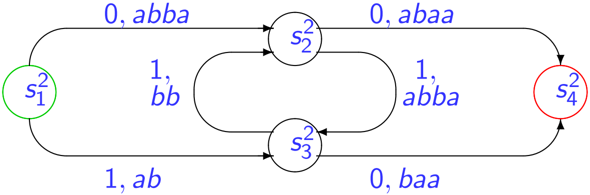
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$\mathcal{A}_1$



$\mathcal{A}_2$



$X_{11} = X_{21}$

$X_{11}=(0, abbaab) \cdot X_{12}+(1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12}=(0, aa) \cdot X_{13}+(1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13}=(\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{21}=(0, abba) \cdot X_{22}+(1, ab) \cdot X_{23}$

$X_{22}=(0, abaa) \cdot X_{24}+(1, abba) \cdot X_{23}$

$X_{23}=(0, baa) \cdot X_{24}+(1, bb) \cdot X_{22}$

$X_{24}=(\varepsilon, \varepsilon)$

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{11} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{21} = (0, abba) \cdot X_{22} + (1, ab) \cdot X_{23}$

$X_{22} = (0, abaa) \cdot X_{24} + (1, abba) \cdot X_{23}$

$X_{23} = (0, baa) \cdot X_{24} + (1, bb) \cdot X_{22}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{21} = (0, abba) \cdot X_{22} + (1, ab) \cdot X_{23}$

$X_{22} = (0, abaa) \cdot X_{24} + (1, abba) \cdot X_{23}$

$X_{23} = (0, baa) \cdot X_{24} + (1, bb) \cdot X_{22}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{21} = (0, abba) \cdot X_{22} + (1, ab) \cdot X_{23}$

$X_{22} = (0, abaa) \cdot X_{24} + (1, abba) \cdot X_{23}$

$X_{23} = (0, baa) \cdot X_{24} + (1, bb) \cdot X_{22}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

Исправление уравнений

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab)\cdot X_{12} + (1, abb)\cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{22} = (0, abaa) \cdot X_{24} + (1, abba) \cdot X_{23}$

$X_{23} = (0, baa) \cdot X_{24} + (1, bb) \cdot X_{22}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$(\varepsilon, abbaab) \cdot X_{12} = (\varepsilon, abba) \cdot X_{22}$

$(\varepsilon, abb) \cdot X_{12} = (\varepsilon, ab) \cdot X_{23}$

Исправление уравнений

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{22} = (0, abaa) \cdot X_{24} + (1, abba) \cdot X_{23}$

$X_{23} = (0, baa) \cdot X_{24} + (1, bb) \cdot X_{22}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$(\varepsilon, abbaab) \cdot X_{12} = (\varepsilon, abba) \cdot X_{22}$

$(\varepsilon, abb) \cdot X_{12} = (\varepsilon, ab) \cdot X_{23}$

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab)\cdot X_{12}+(1, abb)\cdot X_{12}$

$X_{12}=(0, aa) \cdot X_{13}+(1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13}=(\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{22}=(0, abaa) \cdot X_{24}+(1, abba) \cdot X_{23}$

$X_{23}=(0, baa) \cdot X_{24}+(1, bb) \cdot X_{22}$

$X_{24}=(\varepsilon, \varepsilon)$

$(\varepsilon, ab) \cdot X_{12} = X_{22}$

$(\varepsilon, b) \cdot X_{12} = X_{23}$

Сокращение множителей

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{22} = (0, abaa) \cdot X_{24} + (1, abba) \cdot X_{23}$

$X_{23} = (0, baa) \cdot X_{24} + (1, bb) \cdot X_{22}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$(\varepsilon, ab) \cdot X_{12} = X_{22}$

$(\varepsilon, b) \cdot X_{12} = X_{23}$

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$(\varepsilon, ab) \cdot X_{12} = (0, abaa) \cdot X_{24} + (1, abba) \cdot (\varepsilon, b) \cdot X_{12}$

$(\varepsilon, b) \cdot X_{12} = (0, baa) \cdot X_{24} + (1, bb) \cdot (\varepsilon, ab) \cdot X_{12}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{22} = (\varepsilon, ab) \cdot X_{12}$

$X_{23} = (\varepsilon, b) \cdot X_{12}$

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$(\varepsilon, ab) \cdot X_{12} = (0, abaa) \cdot X_{24} + (1, abbab) \cdot X_{12}$

$(\varepsilon, b) \cdot X_{12} = (0, baa) \cdot X_{24} + (1, bbab) \cdot X_{12}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{22} = (\varepsilon, ab) \cdot X_{12}$

$X_{23} = (\varepsilon, b) \cdot X_{12}$

Сокращение множителей

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{24} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{24} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{22} = (\varepsilon, ab) \cdot X_{12}$

$X_{23} = (\varepsilon, b) \cdot X_{12}$

Сокращение множителей

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{24} + (1, bab) \cdot X_{12}$ — уравнения-дубликаты

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{24} + (1, bab) \cdot X_{12}$ — уравнения-дубликаты

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{22} = (\varepsilon, ab) \cdot X_{12}$

$X_{23} = (\varepsilon, b) \cdot X_{12}$

Удаление уравнений-дубликатов

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{24} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{22} = (\varepsilon, ab) \cdot X_{12}$

$X_{23} = (\varepsilon, b) \cdot X_{12}$

Удаление уравнений-дубликатов

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{24} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{22} = (\varepsilon, ab) \cdot X_{12}$

$X_{23} = (\varepsilon, b) \cdot X_{12}$

Исправление уравнений

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$(\varepsilon, aa) \cdot X_{13} = (\varepsilon, aa) \cdot X_{24}$

$(\varepsilon, bab) \cdot X_{12} = (\varepsilon, bab) \cdot X_{12}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{22} = (\varepsilon, ab) \cdot X_{12}$

$X_{23} = (\varepsilon, b) \cdot X_{12}$

Исправление уравнений

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$(\varepsilon, aa) \cdot X_{13} = (\varepsilon, aa) \cdot X_{24}$

$(\varepsilon, bab) \cdot X_{12} = (\varepsilon, bab) \cdot X_{12}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{22} = (\varepsilon, ab) \cdot X_{12}$

$X_{23} = (\varepsilon, b) \cdot X_{12}$

Сокращение множителей

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{13} = X_{24}$

$X_{12} = X_{12}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{22} = (\varepsilon, ab) \cdot X_{12}$

$X_{23} = (\varepsilon, b) \cdot X_{12}$

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab)\cdot X_{12}+(1, abb)\cdot X_{12}$

$X_{12}=(0, aa) \cdot X_{13} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{13} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{13} = X_{24}$

$X_{12} = X_{12}$ — тождество, можно удалить

$X_{24}=(\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{22} = (\varepsilon, ab) \cdot X_{12}$

$X_{23} = (\varepsilon, b) \cdot X_{12}$

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{24} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{13} = X_{24}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{22} = (\varepsilon, ab) \cdot X_{12}$

$X_{23} = (\varepsilon, b) \cdot X_{12}$

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{24} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$ — уравнения-дубликаты

$X_{13} = X_{24}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$ — уравнения-дубликаты

$X_{22} = (\varepsilon, ab) \cdot X_{12}$

$X_{23} = (\varepsilon, b) \cdot X_{12}$

Удаление уравнений-дубликатов

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Пример.

$X_{11} = X_{21}$

$X_{21} = (0, abbaab) \cdot X_{12} + (1, abb) \cdot X_{12}$

$X_{12} = (0, aa) \cdot X_{24} + (1, bab) \cdot X_{12}$

$X_{24} = (\varepsilon, \varepsilon)$

$X_{13} = X_{24}$

$X_{22} = (\varepsilon, ab) \cdot X_{12}$

$X_{23} = (\varepsilon, b) \cdot X_{12}$

Система уравнений подпадает под условия Леммы 2. Значит, $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Вопрос. Где в доказательстве теоремы 10.8 (о разрешимости проблемы эквивалентности для детерминированных автоматов-преобразователей) существенно используется свойство детерминированности преобразователей?

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Задача 7. Какова сложность алгоритма проверки эквивалентности конечных детерминированных автоматов-преобразователей?

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Задача 7. Какова сложность алгоритма проверки эквивалентности конечных детерминированных автоматов-преобразователей?

Недетерминированный автомат-преобразователь $\mathcal{A}$ называется функциональным , если реализуемое им отношение $R_{\mathcal{A}}$ является функцией, т.е. для любого входного слова w существует не более одной такой строки α , что $(w, \alpha) \in R_{\mathcal{A}}$.

Задача 8 [Трудная]. Существует ли алгоритм проверки свойства функциональности для конечных автоматов-преобразователей?

АВТОМАТЫ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

ИТОГИ.

Конечные автоматы-преобразователи занимают промежуточное положение между автоматами-распознавателями и магазинными автоматами.

Для разрешимых задач анализа поведения автоматов-преобразователей можно использовать такие же методы, как и для анализа конечных автоматов-распознавателей.

А для доказательства неразрешимости можно применять те же приемы, которые были использованы для магазинных автоматов.

ИТОГИ.

Конечные автоматы-преобразователи занимают промежуточное положение между автоматами-распознавателями и магазинными автоматами.

Для разрешимых задач анализа поведения автоматов-преобразователей можно использовать такие же методы, как и для анализа конечных автоматов-распознавателей.

А для доказательства неразрешимости можно применять те же приемы, которые были использованы для магазинных автоматов.

Все эти методы являются многоразовыми!

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Задача 9 [Трудная]. А как построить алгоритм минимизации конечных детерминированных автоматов-преобразователей?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 10