

# Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

## Блок 35

Машины Тьюринга

Лектор:

**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:

**valdus@yandex.ru**

# Вступление

Следствие из теоремы об  $m$ -сводимости:

**Если неразрешимая задача  $\mathfrak{T}_1$   $m$ -сводится к задаче  $\mathfrak{T}_2$ , то задача  $\mathfrak{T}_2$  также неразрешима**

Обоснование неразрешимости проблемы общезначимости формул ЛП (теоремы Чёрча) будет основано на этом следствии:

- ▶  $\mathfrak{T}_2$  — проблема общезначимости формул логики предикатов
- ▶  $\mathfrak{T}_1$  — известная неразрешимая задача
- ▶ Достаточно обосновать  $m$ -сводимость выбранной задачи  $\mathfrak{T}_1$  к  $\mathfrak{T}_2$

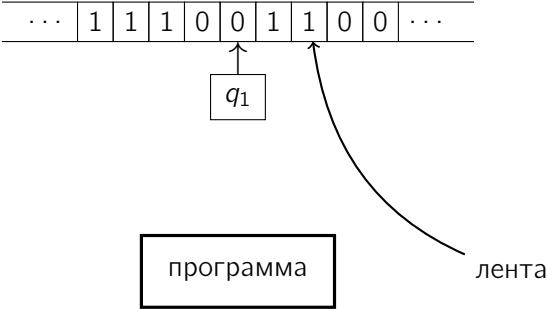
В качестве  $\mathfrak{T}_1$  рассмотрим **самую известную** неразрешимую задачу:  
**проблему останова машин Тьюринга**

---

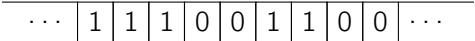
Существуют разные, *хотя и в целом эквивалентные*, варианты определений понятия «машина Тьюринга»  
Кроме того, *судя по всему*, не все проходящие этот курс достаточно хорошо знакомы с машинами Тьюринга

Поэтому перед обсуждением теоремы Чёрча подробно введём всё, что необходимо для определения проблемы останова

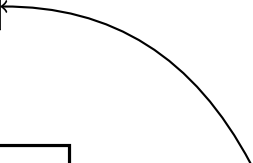
# Машины Тьюринга (МТ)



# Машины Тьюринга (МТ)



ГОЛОВКА



# Машины Тьюринга (МТ)



$q_1$

$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

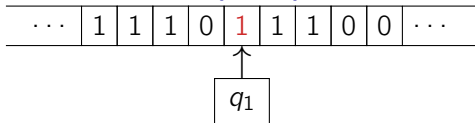
↑  
программа

← команда

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду

# Машины Тьюринга (МТ)



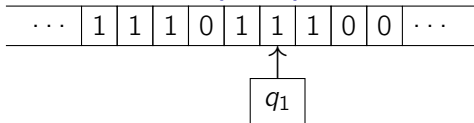
$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку **НОВЫЙ СИМВОЛ**

# Машины Тьюринга (МТ)



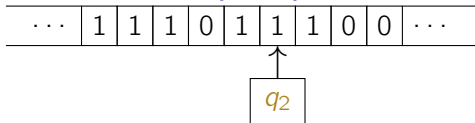
$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку новый символ
- ▶ **сдвигаем** головку

# Машины Тьюринга (МТ)



$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

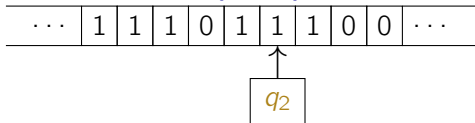
программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку новый символ
- ▶ сдвигаем головку
- ▶ **меняем состояние**



# Машины Тьюринга (МТ)



$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку новый символ
- ▶ сдвигаем головку
- ▶ меняем состояние

Определим всё это по порядку, детально и строго

# MT: синтаксис

Алфавит — это непустое конечное множество символов (букв)

Машина Тьюринга (MT)<sup>1</sup> — это система  $(\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где

- ▶  $\mathfrak{A}$  — алфавит ленты
- ▶  $\Lambda \in \mathfrak{A}$  — пустой символ
- ▶  $\mathcal{Q}$  — алфавит состояний
- ▶  $q_0, q_f \in \mathcal{Q}$  — соответственно начальное состояние и заключительное состояние
- ▶  $\mathcal{P} : (\mathcal{Q} \setminus \{q_f\}) \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \times \{L, R\} \times \mathcal{Q}$  — программа

Программа MT также будет пониматься как множество команд:

$$(q, a, b, S, p) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{P}(q, a) = (b, S, p)$$

---

<sup>1</sup> Здесь обсуждается только один из вариантов определения машины Тьюринга — самый удобный для обоснования теоремы Чёрча

# МТ: семантика

$$M = (\mathcal{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$$

**Слово** в алфавите  $\Sigma$  — это конечная последовательность букв из  $\Sigma$

В записи слов принято опускать  
разделители (запятые) между символами:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad x_1 x_2 \dots x_n$$

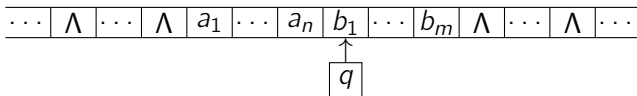
$\Sigma^*$  — множество всех слов в алфавите  $\Sigma$

$\Sigma^+$  — множество всех непустых слов в алфавите  $\Sigma$

**Ленточное слово** — это слово в алфавите  $\mathcal{A}$

**Конфигурация** машины Тьюринга — это набор  $(\alpha, q, \beta)$ ,  
где  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^+$  и  $q \in \mathcal{Q}$

**Пояснение:** конфигурация  $(a_1 \dots a_n, q, b_1 \dots b_m)$  означает, что МТ  
находится в состоянии  $q$ , на ленте записано слово  $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$ ,  
окружённое пустыми символами, и обозревается символ  $b_1$



## МТ: семантика

$$M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$$

Способ преобразования конфигураций командой  $C$  можно задать как двуместное отношение  $\rightarrow_C$  на множестве конфигураций

Если  $C = (q, a, b, R, p)$ , то  $\rightarrow_C$  состоит из следующих пар:

$$\begin{aligned}(\alpha, q, a\chi\beta) &\rightarrow_C (\alpha b, p, \chi\beta) \\(\alpha, q, a) &\rightarrow_C (\alpha b, p, \Lambda)\end{aligned}$$

Если  $C = (q, a, b, L, p)$ , то  $\rightarrow_C$  состоит из следующих пар:

$$\begin{aligned}(\alpha\chi y, q, a\beta) &\rightarrow_C (\alpha\chi, p, yb\beta) \\(y, q, a\beta) &\rightarrow_C (\Lambda, p, yb\beta)\end{aligned}$$

$$(\alpha, \beta \in \mathfrak{A}^*; \chi, y \in \mathfrak{A})$$

**Отношение переходов**  $\rightarrow_M$  МТ  $M$  — это

объединение отношений  $\rightarrow_C$  по всем командам  $C$  МТ  $M$

**Трасса** МТ  $M$  — это последовательность конфигураций,

в которой каждая пара соседних конфигураций  $\sigma_i, \sigma_{i+1}$

входит в отношение переходов:  $\sigma_i \rightarrow_M \sigma_{i+1}$

## МТ: семантика

$$M = (\mathcal{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$$

Конфигурация  $(\alpha, q, \beta)$  — **заключительная**, если  $q = q_f$

**Вычисление** МТ  $M$  на ленточном слове  $w$  — это трасса,

- ▶ начинающаяся в конфигурации  $(\Lambda, q_0, w\Lambda)$  и
- ▶ либо бесконечная,  
либо оканчивающаяся в заключительной конфигурации

**Утверждение.** Для любой МТ  $M$  и любого ленточного слова  $w$  существует единственное вычисление  $M$  на  $w$

**Доказательство.**

Достаточно заметить, что в соотношении  $\sigma_i \rightarrow_M \sigma_{i+1}$

- ▶  $\sigma_i$  может быть любой незаключительной конфигурацией и не может быть заключительной, и
- ▶  $\sigma_{i+1}$  однозначно определяется конфигурацией  $\sigma_i$  ▼

## MT: пример

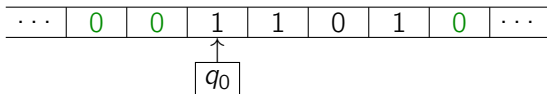
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

(0,  $q_0$ , 11010)



## MT: пример

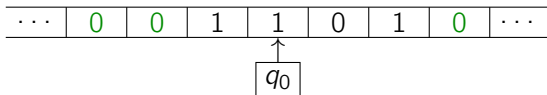
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$\begin{array}{l} (0, q_0, 11010) \\ (01, q_0, 1010) \end{array} \rightarrow_M$$



# MT: пример

**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

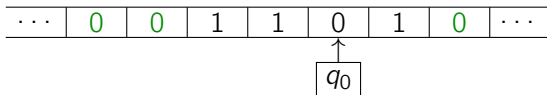
$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$(0, q_0, 11010) \rightarrow_M$$

$$(01, q_0, 1010) \rightarrow_M$$

$$(011, q_0, 010)$$





## MT: пример

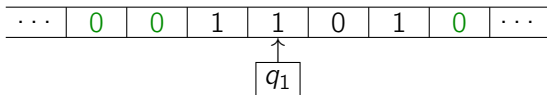
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$\begin{array}{lll} (0, q_0, 11010) & \rightarrow_M \\ (01, q_0, 1010) & \rightarrow_M \\ (011, q_0, 010) & \rightarrow_M \\ (01, q_1, 1010) & \end{array}$$



## МТ: пример

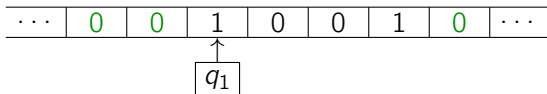
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$\begin{array}{lll} (0, q_0, 11010) & \rightarrow_M \\ (01, q_0, 1010) & \rightarrow_M \\ (011, q_0, 010) & \rightarrow_M \\ (01, q_1, 1010) & \rightarrow_M \\ (0, q_1, 10010) & \end{array}$$



## MT: пример

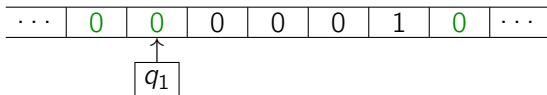
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$\begin{array}{llll} (0, q_0, 11010) & \rightarrow_M \\ (01, q_0, 1010) & \rightarrow_M \\ (011, q_0, 010) & \rightarrow_M \\ (01, q_1, 1010) & \rightarrow_M \\ (0, q_1, 10010) & \rightarrow_M \\ (0, q_1, 000010) & \end{array}$$



## MT: пример

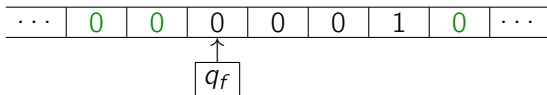
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$\begin{array}{llll} (0, q_0, 11010) & \rightarrow_M \\ (01, q_0, 1010) & \rightarrow_M \\ (011, q_0, 010) & \rightarrow_M \\ (01, q_1, 1010) & \rightarrow_M \\ (0, q_1, 10010) & \rightarrow_M \\ (0, q_1, 000010) & \rightarrow_M \\ (00, q_f, 00010) & \end{array}$$



# MT: проблема останова

Проблема останова машин Тьюринга — это задача распознавания **Halt** следующего вида:

- ▶ На вход подаётся пара  $(M, w)$ , где
  - ▶  $M$  — произвольная машина Тьюринга и
  - ▶  $w$  — произвольное ленточное слово (для  $M$ )
- ▶  $\text{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow$  вычисление  $M$  на слове  $w$  конечно

**Теорема.** Проблема останова машин Тьюринга неразрешима

Доказательство этой теоремы здесь не приводится, так как оно

- ▶ слишком известно,
- ▶ не относится к логике и
- ▶ должно было рассказываться вам хотя бы раз в других курсах