Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 35

Машины Тьюринга

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Вступление

Следствие из теоремы об m-сводимости:

Если неразрешимая задача $\mathfrak{T}_1$ m-сводится к задаче $\mathfrak{T}_2$, то задача $\mathfrak{T}_2$ также неразрешима

Обоснование неразрешимости проблемы общезначимости формул ЛП (теоремы Чёрча) будет основано на этом следствии:

- $\mathfrak{T}_2$ — проблема общезначимости формул логики предикатов
- $\mathfrak{T}_1$ — известная неразрешимая задача
- Достаточно обосновать m-сводимость выбранной задачи $\mathfrak{T}_1$ к $\mathfrak{T}_2$

В качестве $\mathfrak{T}_1$ рассмотрим **самую известную** неразрешимую задачу:

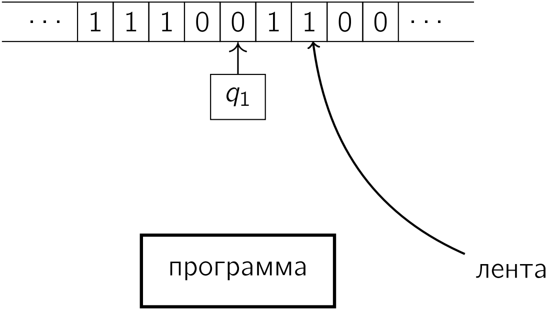
проблему останова машин Тьюринга

Существуют разные, *хотя и в целом эквивалентные*, варианты определений понятия «машина Тьюринга»

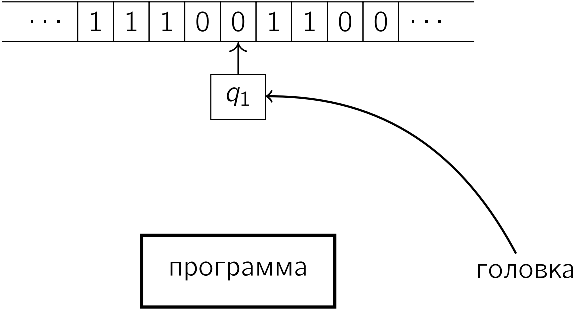
Кроме того, *судя по всему*, не все проходящие этот курс достаточно хорошо знакомы с машинами Тьюринга

Поэтому перед обсуждением теоремы Чёрча подробно введём всё, что необходимо для определения проблемы останова

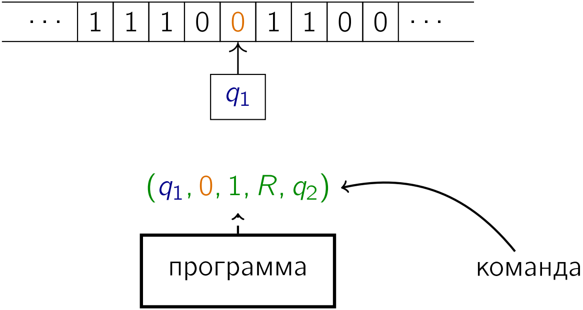
Машины Тьюринга (МТ)



Машины Тьюринга (МТ)



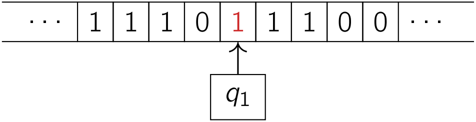
Машины Тьюринга (МТ)



Шаг вычисления выглядит так:

- по текущему состоянию
  и обозреваемому символу выбираем команду

Машины Тьюринга (МТ)



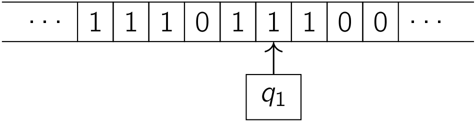
$$(q_1, 0, 1, R, q_2)$$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- по текущему состоянию
  и обозреваемому символу выбираем команду
- записываем в ячейку новый символ

Машины Тьюринга (МТ)



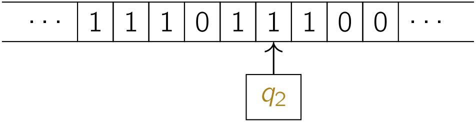
$$(q_1, 0, 1, R, q_2)$$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- по текущему состоянию
  и обозреваемому символу выбираем команду
- записываем в ячейку новый символ
- сдвигаем головку

Машины Тьюринга (МТ)



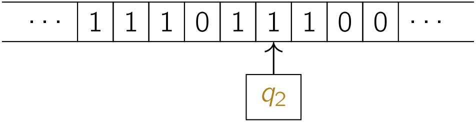
$$(q_1, 0, 1, R, q_2)$$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- по текущему состоянию
  и обозреваемому символу выбираем команду
- записываем в ячейку новый символ
- сдвигаем головку
- меняем состояние

Машины Тьюринга (МТ)



$$(q_1, 0, 1, R, q_2)$$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- по текущему состоянию
  и обозреваемому символу выбираем команду
- записываем в ячейку новый символ
- сдвигаем головку
- меняем состояние

Определим всё это по порядку, детально и строго

МТ: синтаксис

Алфавит — это непустое конечное множество символов (букв)

Машина Тьюринга (МТ)[1] — это система $(\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где

- $\mathfrak{A}$ — алфавит ленты
- $\Lambda \in \mathfrak{A}$ — пустой символ
- $\mathcal{Q}$ — алфавит состояний
- $q_0, q_f \in \mathcal{Q}$ — соответственно
  начальное состояние и заключительное состояние
- $\mathcal{P} : (\mathcal{Q} \setminus \{q_f\}) \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \times \{L, R\} \times \mathcal{Q}$ — программа

Программа МТ также будет пониматься как множество команд:

$$(q, a, b, S, p) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{P}(q, a) = (b, S, p)$$

1 Здесь обсуждается только один из вариантов определения машины Тьюринга — самый удобный для обоснования теоремы Чёрча

MT: семантика

$$M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$$

Слово в алфавите Σ — это конечная последовательность букв из Σ

В записи слов принято опускать
разделители (запятые) между символами:

$$\cancel{x_1, x_2, \ldots, x_n} \qquad x_1 x_2 \ldots x_n$$

Σ^* — множество всех слов в алфавите Σ

Σ^+ — множество всех непустых слов в алфавите Σ

Ленточное слово — это слово в алфавите $\mathfrak{A}$

Конфигурация машины Тьюринга — это набор (α, q, β),
где $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}^+$ и $q \in \mathcal{Q}$

Пояснение: конфигурация $(a_1 \ldots a_n, q, b_1 \ldots b_m)$ означает, что МТ находится в состоянии q, на ленте записано слово $a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m$, окружённое пустыми символами, и обозревается символ b_1

$\cdots$	Λ	$\cdots$	Λ	a_1	$\cdots$	a_n	b_1	$\cdots$	b_m	Λ	$\cdots$	Λ	$\cdots$

$\boxed{q}$

МТ: семантика

$$M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$$

Способ преобразования конфигураций командой C можно задать как двуместное отношение $\to_C$ на множестве конфигураций

Если $C = (q, a, b, R, p)$, то $\to_C$ состоит из следующих пар:

$$\begin{array}{lcl} (\alpha, q, ax\beta) & \to_C & (\alpha b, p, x\beta) \\ (\alpha, q, a) & \to_C & (\alpha b, p, \Lambda) \end{array}$$

Если $C = (q, a, b, L, p)$, то $\to_C$ состоит из следующих пар:

$$\begin{array}{rcr} (\alpha xy, q, a\beta) & \to_C & (\alpha x, p, yb\beta) \\ (y, q, a\beta) & \to_C & (\Lambda, p, yb\beta) \end{array}$$

$$(\alpha, \beta \in \mathfrak{A}^*;\ x, y \in \mathfrak{A})$$

Отношение переходов $\to_M$ МТ M — это объединение отношений $\to_C$ по всем командам C МТ M

Трасса МТ M — это последовательность конфигураций, в которой каждая пара соседних конфигураций σ_i, σ_{i+1} входит в отношение переходов: $\sigma_i \to_M \sigma_{i+1}$

МТ: семантика

$$M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$$

Конфигурация (α, q, β) — заключительная, если $q = q_f$

Вычисление МТ M на ленточном слове w — это трасса,

- начинающаяся в конфигурации $(\Lambda, q_0, w\Lambda)$ и
- либо бесконечная,
  либо оканчивающаяся в заключительной конфигурации

Утверждение. **Для любой МТ M и любого ленточного слова w существует единственное вычисление M на w**

Доказательство.
Достаточно заметить, что в соотношении $\sigma_i \to_M \sigma_{i+1}$

- σ_i может быть любой незаключительной конфигурацией
  и не может быть заключительной, и
- σ_{i+1} однозначно определяется конфигурацией σ_i ▼

МТ: пример

Пример: $M = (\{0,1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \qquad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$
$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \qquad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$(0, \quad q_0, \quad 11010)$$

$\cdots$	0	0	1	1	0	1	0	$\cdots$

q_0

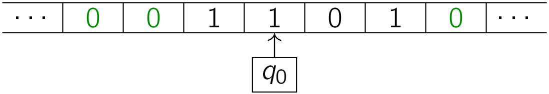
МТ: пример

Пример: $M = (\{0,1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \qquad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$
$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \qquad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{array}{llll} (0, & q_0, & 11010) & \to_M \\ (01, & q_0, & 1010) & \end{array}$$



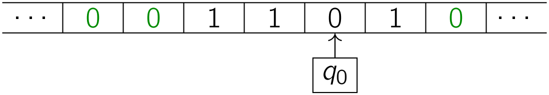
МТ: пример

Пример: $M = (\{0,1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) & \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f) \\ \mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) & \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1) \end{array}$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{array}{rcll} (0, & q_0, & 11010) & \to_M \\ (01, & q_0, & 1010) & \to_M \\ (011, & q_0, & 010) & \end{array}$$



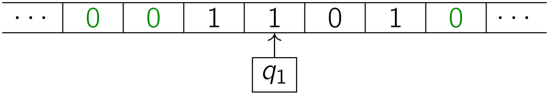
МТ: пример

Пример: $M = (\{0,1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) & \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f) \\ \mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) & \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1) \end{array}$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{array}{rlll} (0, & q_0, & 11010) & \to_M \\ (01, & q_0, & 1010) & \to_M \\ (011, & q_0, & 010) & \to_M \\ (01, & q_1, & 1010) & \end{array}$$



МТ: пример

Пример: $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) & \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f) \\ \mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) & \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1) \end{array}$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{array}{rlll} (0, & q_0, & 11010) & \to_M \\ (01, & q_0, & 1010) & \to_M \\ (011, & q_0, & 010) & \to_M \\ (01, & q_1, & 1010) & \to_M \\ (0, & q_1, & 10010) & \end{array}$$

$\cdots$	0	0	1	0	0	1	0	$\cdots$

q_1

МТ: пример

Пример: $M = (\{0,1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) & \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f) \\ \mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) & \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1) \end{array}$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{array}{rlll} (0, & q_0, & 11010) & \to_M \\ (01, & q_0, & 1010) & \to_M \\ (011, & q_0, & 010) & \to_M \\ (01, & q_1, & 1010) & \to_M \\ (0, & q_1, & 10010) & \to_M \\ (0, & q_1, & 000010) & \end{array}$$

$\cdots$	0	0	0	0	0	1	0	$\cdots$

$\boxed{q_1}$

МТ: пример

Пример: $M = (\{0,1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) & \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f) \\ \mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) & \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1) \end{array}$$

Вычисление M на слове 1101:

$$\begin{array}{rlll} (0, & q_0, & 11010) & \to_M \\ (01, & q_0, & 1010) & \to_M \\ (011, & q_0, & 010) & \to_M \\ (01, & q_1, & 1010) & \to_M \\ (0, & q_1, & 10010) & \to_M \\ (0, & q_1, & 000010) & \to_M \\ (00, & q_f, & 00010) & \end{array}$$

···	0	0	0	0	0	1	0	···
			q_f					

МТ: проблема останова

Проблема останова машин Тьюринга — это задача распознавания **Halt** следующего вида:

- На вход подаётся пара (M, w), где
  - M — произвольная машина Тьюринга и
  - w — произвольное ленточное слово (для M)
- $\mathbf{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow$ вычисление M на слове w конечно

Теорема. Проблема останова машин Тьюринга неразрешима

Доказательство этой теоремы здесь не приводится, так как оно

- слишком известно,
- не относится к логике и
- должно было рассказываться вам хотя бы раз в других курсах