

# Математическая логика

[mk.cs.msu.ru](http://mk.cs.msu.ru) → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

## Блок 35

Машины Тьюринга

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

[valdus@yandex.ru](mailto:valdus@yandex.ru)

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр

# Вступление

Следствие из теоремы об  $\text{m}$ -сводимости:

Если неразрешимая задача  $\mathfrak{T}_1$   $\text{m}$ -сводится к задаче  $\mathfrak{T}_2$ ,  
то задача  $\mathfrak{T}_2$  также неразрешима

Обоснование неразрешимости проблемы общезначимости формул ЛП  
(теоремы Чёрча) будет основано на этом следствии:

- ▶  $\mathfrak{T}_2$  — проблема общезначимости формул логики предикатов
- ▶  $\mathfrak{T}_1$  — известная неразрешимая задача
- ▶ Достаточно обосновать  $\text{m}$ -сводимость выбранной задачи  $\mathfrak{T}_1$  к  $\mathfrak{T}_2$

В качестве  $\mathfrak{T}_1$  рассмотрим **самую известную неразрешимую задачу:**  
**проблему останова машин Тьюринга**

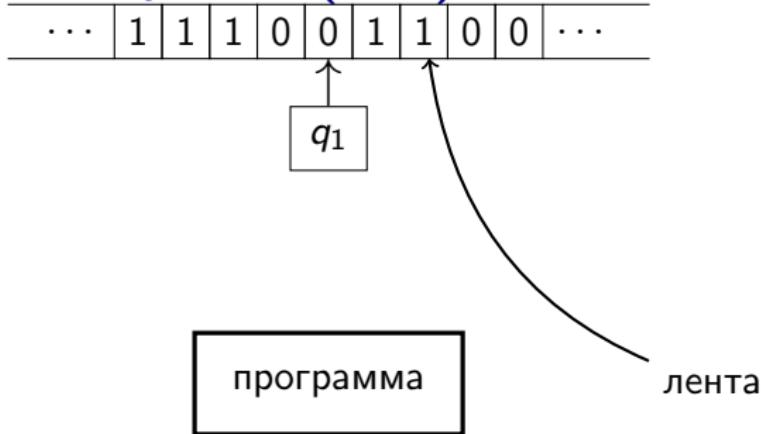
---

Существуют разные, хотя и в целом эквивалентные,  
варианты определений понятия «машина Тьюринга»

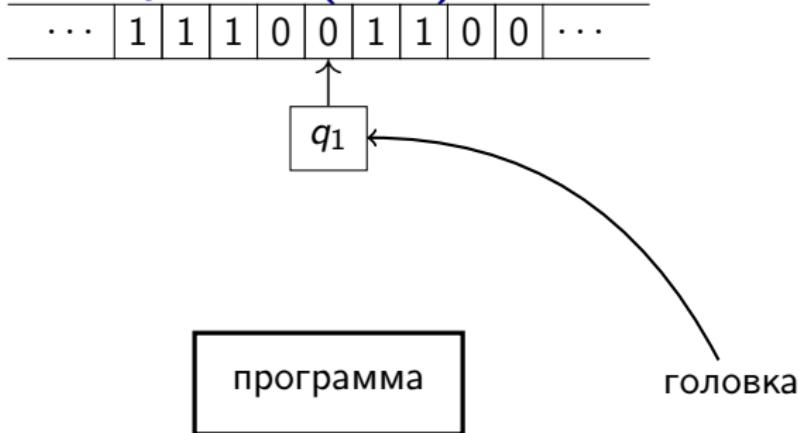
Кроме того, судя по всему, не все проходящие этот курс  
достаточно хорошо знакомы с машинами Тьюринга

Поэтому перед обсуждением теоремы Чёрча подробно введём всё,  
что необходимо для определения проблемы останова

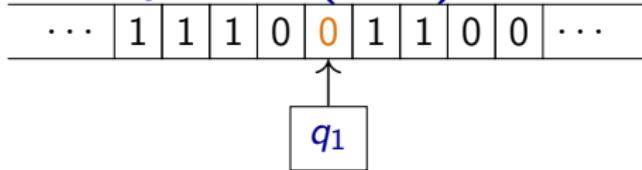
# Машины Тьюринга (МТ)



# Машины Тьюринга (МТ)



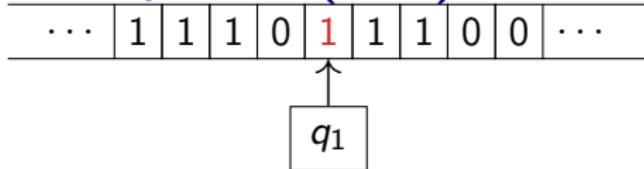
# Машины Тьюринга (МТ)



Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду

# Машины Тьюринга (МТ)



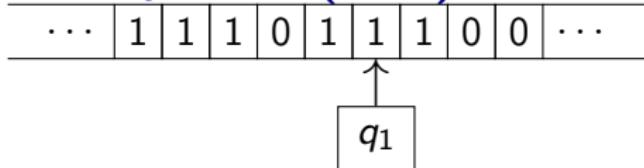
$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку **новый символ**

# Машины Тьюринга (МТ)



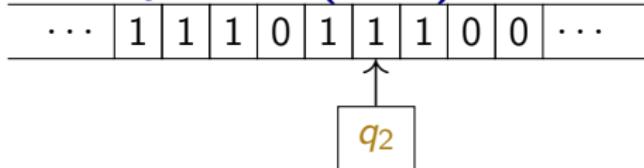
$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку новый символ
- ▶ сдвигаем головку

# Машины Тьюринга (МТ)



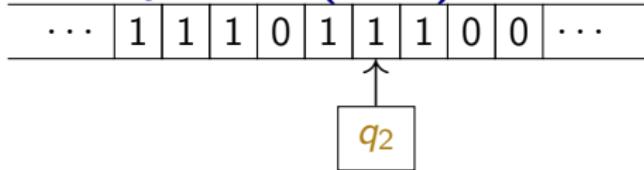
$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку новый символ
- ▶ сдвигаем головку
- ▶ меняем состояние

# Машины Тьюринга (МТ)



$(q_1, 0, 1, R, q_2)$

программа

Шаг вычисления выглядит так:

- ▶ по текущему состоянию и обозреваемому символу выбираем команду
- ▶ записываем в ячейку новый символ
- ▶ сдвигаем головку
- ▶ меняем состояние

Определим всё это по порядку, детально и строго

# МТ: синтаксис

Алфавит — это непустое конечное множество символов (букв)

Машина Тьюринга (МТ)<sup>1</sup> — это система  $(\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где

- ▶  $\mathfrak{A}$  — алфавит ленты
- ▶  $\Lambda \in \mathfrak{A}$  — пустой символ
- ▶  $\mathcal{Q}$  — алфавит состояний
- ▶  $q_0, q_f \in \mathcal{Q}$  — соответственно  
начальное состояние и заключительное состояние
- ▶  $\mathcal{P} : (\mathcal{Q} \setminus \{q_f\}) \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \times \{L, R\} \times \mathcal{Q}$  — программа

Программа МТ также будет пониматься как множество команд:

$$(q, a, b, S, p) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{P}(q, a) = (b, S, p)$$

---

1 Здесь обсуждается только один из вариантов определения машины Тьюринга —  
самый удобный для обоснования теоремы Чёрча

# МТ: семантика

$$M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$$

Слово в алфавите  $\Sigma$  — это конечная последовательность букв из  $\Sigma$

В записи слов принято опускать  
разделители (запятые) между символами:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad x_1 x_2 \dots x_n$$

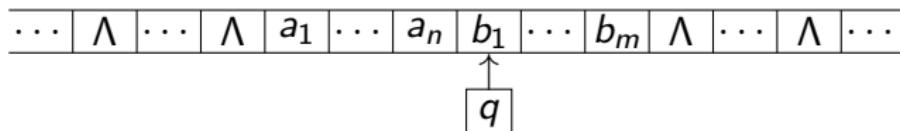
$\Sigma^*$  — множество всех слов в алфавите  $\Sigma$

$\Sigma^+$  — множество всех непустых слов в алфавите  $\Sigma$

Ленточное слово — это слово в алфавите  $\mathfrak{A}$

Конфигурация машины Тьюринга — это набор  $(\alpha, q, \beta)$ ,  
где  $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}^+$  и  $q \in \mathcal{Q}$

**Пояснение:** конфигурация  $(a_1 \dots a_n, q, b_1 \dots b_m)$  означает, что МТ  
находится в состоянии  $q$ , на ленте записано слово  $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$ ,  
окружённое пустыми символами, и обозревается символ  $b_1$



## МТ: семантика

$$M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$$

Способ преобразования конфигураций командой  $C$  можно задать как двуместное отношение  $\rightarrow_C$  на множестве конфигураций

Если  $C = (q, a, b, R, p)$ , то  $\rightarrow_C$  состоит из следующих пар:

$$\begin{aligned}(\alpha, q, ax\beta) &\rightarrow_C (\alpha b, p, x\beta) \\(\alpha, q, a) &\rightarrow_C (\alpha b, p, \Lambda)\end{aligned}$$

Если  $C = (q, a, b, L, p)$ , то  $\rightarrow_C$  состоит из следующих пар:

$$\begin{aligned}(\alpha xy, q, a\beta) &\rightarrow_C (\alpha x, p, yb\beta) \\(y, q, a\beta) &\rightarrow_C (\Lambda, p, yb\beta)\end{aligned}$$
$$(\alpha, \beta \in \mathfrak{A}^*; x, y \in \mathfrak{A})$$

Отношение переходов  $\rightarrow_M$  МТ  $M$  — это

объединение отношений  $\rightarrow_C$  по всем командам  $C$  МТ  $M$

Трасса МТ  $M$  — это последовательность конфигураций, в которой каждая пара соседних конфигураций  $\sigma_i, \sigma_{i+1}$  входит в отношение переходов:  $\sigma_i \rightarrow_M \sigma_{i+1}$

## МТ: семантика

$$M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$$

Конфигурация  $(\alpha, q, \beta)$  — **заключительная**, если  $q = q_f$

**Вычисление** МТ  $M$  на ленточном слове  $w$  — это трасса,

- ▶ начинающаяся в конфигурации  $(\Lambda, q_0, w\Lambda)$  и
- ▶ либо бесконечная,
- либо оканчивающаяся в заключительной конфигурации

**Утверждение.** Для любой МТ  $M$  и любого ленточного слова  $w$  существует единственное вычисление  $M$  на  $w$

**Доказательство.**

Достаточно заметить, что в соотношении  $\sigma_i \rightarrow_M \sigma_{i+1}$

- ▶  $\sigma_i$  может быть любой незаключительной конфигурацией и не может быть заключительной, и
- ▶  $\sigma_{i+1}$  однозначно определяется конфигурацией  $\sigma_i$  ▼

## МТ: пример

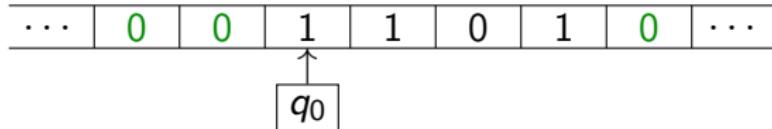
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$(0, q_0, 11010)$$



# МТ: пример

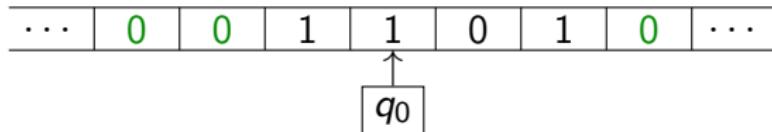
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$\begin{array}{c} (0, q_0, 11010) \\ (01, q_0, 1010) \end{array} \rightarrow_M$$



## МТ: пример

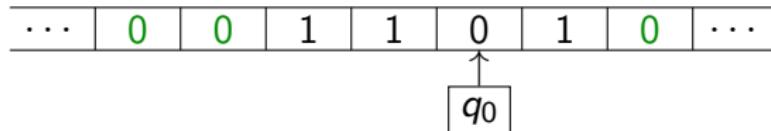
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$\begin{array}{l} (0, q_0, 11010) \rightarrow_M \\ (01, q_0, 1010) \rightarrow_M \\ (011, q_0, 010) \end{array}$$



## МТ: пример

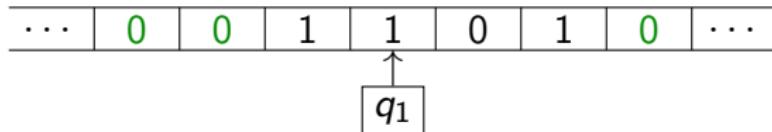
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$\begin{array}{l} (0, q_0, 11010) \rightarrow_M \\ (01, q_0, 1010) \rightarrow_M \\ (011, q_0, 010) \rightarrow_M \\ (01, q_1, 1010) \end{array}$$



# МТ: пример

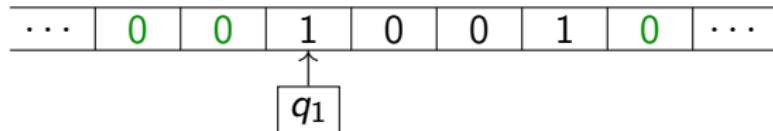
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$\begin{array}{l} (0, q_0, 11010) \rightarrow_M \\ (01, q_0, 1010) \rightarrow_M \\ (011, q_0, 010) \rightarrow_M \\ (01, q_1, 1010) \rightarrow_M \\ (0, q_1, 10010) \end{array}$$



# МТ: пример

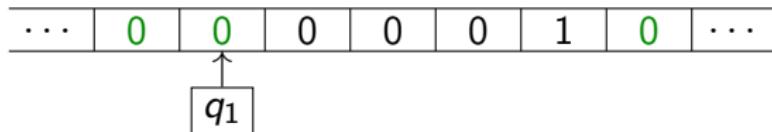
**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$\begin{array}{lll} (0, q_0, 11010) & \xrightarrow{M} \\ (01, q_0, 1010) & \xrightarrow{M} \\ (011, q_0, 010) & \xrightarrow{M} \\ (01, q_1, 1010) & \xrightarrow{M} \\ (0, q_1, 10010) & \xrightarrow{M} \\ (0, q_1, 000010) & \end{array}$$



# МТ: пример

**Пример:**  $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_1, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$ , где:

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (0, L, q_1) \quad \mathcal{P}(q_1, 0) = (0, R, q_f)$$

$$\mathcal{P}(q_0, 1) = (1, R, q_0) \quad \mathcal{P}(q_1, 1) = (0, L, q_1)$$

Вычисление  $M$  на слове 1101:

$$(0, q_0, 11010) \rightarrow_M$$

$$(01, q_0, 1010) \rightarrow_M$$

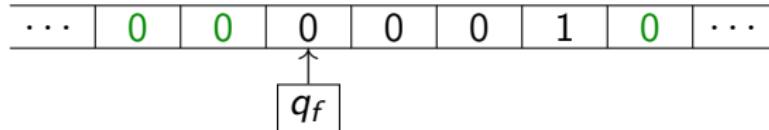
$$(011, q_0, 010) \rightarrow_M$$

$$(01, q_1, 1010) \rightarrow_M$$

$$(0, q_1, 10010) \rightarrow_M$$

$$(0, q_1, 000010) \rightarrow_M$$

$$(00, q_f, 00010)$$



## МТ: проблема останова

Проблема останова машин Тьюринга — это задача распознавания **Halt** следующего вида:

- ▶ На вход подаётся пара  $(M, w)$ , где
  - ▶  $M$  — произвольная машина Тьюринга и
  - ▶  $w$  — произвольное ленточное слово (для  $M$ )
- ▶  $\text{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow$  вычисление  $M$  на слове  $w$  конечно

**Теорема.** Проблема останова машин Тьюринга неразрешима

Доказательство этой теоремы здесь не приводится, так как оно

- ▶ слишком известно,
- ▶ не относится к логике и
- ▶ так или иначе рассказывалось вам хотя бы раз в других курсах