Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 35

Теорема Чёрча

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Вступление

Проблема общезначимости формул логики предикатов — это задача распознавания **Valid** следующего вида:

- На вход подаётся пара (σ, φ), где
  - σ — произвольная сигнатура логики предикатов и
  - φ — произвольная формула логики предикатов сигнатуры σ
- $\mathbf{Valid}(\sigma, \varphi) = 1 \Leftrightarrow \models \varphi$

Проблема останова машин Тьюринга — это задача распознавания **Halt** следующего вида:

- На вход подаётся пара (M, w), где
  - M — произвольная машина Тьюринга и
  - w — произвольное ленточное слово (для M)
- $\mathbf{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow$ вычисление M на слове w конечно

Лемма о сведе́нии проблемы останова

Проблема останова машин Тьюринга m-сводима к проблеме общезначимости формул логики предикатов

Доказательство.

По *определению m-сводимости*,
достаточно предложить такой алгоритм $\mathcal{A}$:

- Вход: произвольная МТ M и произвольное ленточное слово w
- Выход: сигнатура $\sigma_{M,w}$ и формула $\varphi_{M,w}$ этой сигнатуры
- $\mathcal{A}(M, w) = (\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}) \quad \Leftrightarrow \quad \models \varphi_{M,w}$

Сигнатуру $\sigma_{M,w}$ устро́им так:

- Константы: $\mathfrak{A} \cup \mathcal{Q} \cup \{\perp\}$, где $\perp \notin \mathfrak{A} \cup \mathcal{Q}$
- Единственный функциональный символ: $\cdot^{(2)}$
  - Считаем этот символ ассоциативным вправо: $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} \cdot \mathrm{z} = \mathrm{x} \cdot (\mathrm{y} \cdot \mathrm{z})$
- Единственный предикатный символ: $\mathrm{Re}^{(3)}$

Лемма о сведе́нии проблемы останова

Доказательство. $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, $w \in \mathfrak{A}^*$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $\sigma_{M,w}$, $\varphi_{M,w}$

Назовём конфигурацию σ достижимой, если она содержится в вычислении M на w:

- Конфигурация $(\Lambda, q_0, w\Lambda)$ достижима
- Если конфигурация σ достижима и $\sigma \to_M \sigma'$, то конфигурация σ' достижима
- Других достижимых конфигураций нет

Тогда **Halt**$(M, w) = 1 \Leftrightarrow$
существует достижимая заключительная конфигурация

Ленточному слову $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ сопоста́вим терм

$$\tau_\alpha = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot \bot$$

Конфигурации $\sigma = (\alpha, q, \beta)$ МТ M сопоста́вим тройку термов $\tau_\sigma = (\tau_{\alpha^-}, q, \tau_\beta)$, где α^- — зеркальный образ слова α: если $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$, то $\alpha^- = a_k \dots a_2 a_1$

Фразе "конфигурация σ достижима" сопоста́вим атом $\mathrm{Re}(\tau_\sigma)$

Лемма о сведе́нии проблемы останова

Доказательство. $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, $w \in \mathfrak{A}^*$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $\sigma_{M,w}$, $\varphi_{M,w}$

Каждому правилу C, $C \in \mathcal{P}$, сопоста́вим формулу ψ_C:

- Если $C = (q, a, b, R, p)$, то $\psi_C = \psi_C^{R1} \,\&\, \psi_C^{R2}$, где
$$\psi_C^{R1} = \forall\alpha\, \forall\beta\, \forall \mathtt{x}(\mathrm{Re}(\alpha, q, a \cdot \mathtt{x} \cdot \beta) \to \mathrm{Re}(b \cdot \alpha, p, \mathtt{x} \cdot \beta))$$
$$\psi_C^{R2} = \forall\alpha \quad (\mathrm{Re}(\alpha, q, a \cdot \bot) \to \mathrm{Re}(b \cdot \alpha, p, \Lambda \cdot \bot))$$
- Если $C = (q, a, b, L, p)$, то $\psi_C = \psi_C^{L1} \,\&\, \psi_C^{L2}$, где
$$\psi_C^{L1} = \forall\alpha\, \forall \mathtt{x}\, \forall\beta\, \forall \mathtt{y}(\mathrm{Re}(\mathtt{y} \cdot \mathtt{x} \cdot \alpha, q, a \cdot \beta) \to \mathrm{Re}(\mathtt{x} \cdot \alpha, p, \mathtt{y} \cdot b \cdot \beta))$$
$$\psi_C^{L2} = \quad \forall\beta\, \forall \mathtt{y}(\mathrm{Re}(\mathtt{y} \cdot \bot, q, a \cdot \beta) \to \mathrm{Re}(\Lambda \cdot \bot, p, \mathtt{y} \cdot b \cdot \beta))$$

По *определению отношения* $\to_C$,
если $\sigma \to_C \sigma'$, то $\psi_C \models \mathrm{Re}(\tau_\sigma) \to \mathrm{Re}(\tau_{\sigma'})$,
а значит, и $\psi_C, \mathrm{Re}(\tau_\sigma) \models \mathrm{Re}(\tau_{\sigma'})$

Программе $\mathcal{P}$ сопоста́вим формулу $\psi_{\mathcal{P}} = \underset{C \in \mathcal{P}}{\&} \psi_C$

По *определению отношения* $\to_M$,
если $\sigma \to_M \sigma'$, то $\psi_{\mathcal{P}}, \mathrm{Re}(\tau_\sigma) \models \mathrm{Re}(\tau_{\sigma'})$

Лемма о сведе́нии проблемы останова

Доказательство. $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, $w \in \mathfrak{A}^*$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}$

Формулу $\varphi_{M,w}$ зададим так: $\varphi_{M,w} = \psi_0 \,\&\, \psi_{\mathcal{P}} \to \psi_f$, где

- $\psi_0 = \mathrm{Re}(\tau_{(\Lambda, q_0, w\Lambda)})$ (“конфигурация $(\Lambda, q_0, w\Lambda)$ достижима”)
- $\psi_f = \exists\alpha\, \exists\beta\, \mathrm{Re}(\alpha, q_f, \beta)$
  (“существует достижимая заключительная конфигурация”)

Осталось показать, что $\mathbf{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{Valid}(\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}) = 1$

$(\Leftarrow)$: $\models \varphi_{M,w}$, а значит,
формула $\varphi_{M,w}$ выполняется в такой интерпретации $\mathcal{I}$:

- предметная область — все конфигурации МТ M
- $\overline{\mathrm{Re}}(t_\alpha, t_q, t_\beta) = \mathbb{t} \Leftrightarrow$
  тройка (t_α, t_q, t_β) соответствует достижимой конфигурации

Тогда верно $\mathcal{I} \models \psi_0 \,\&\, \psi_{\mathcal{P}}$:

“$\psi_0 \,\&\, \psi_{\mathcal{P}}$” — *это формульная запись определения достижимости*

Значит, верно и $\mathcal{I} \models \psi_f$:

существует достижимая заключительная конфигурация

Лемма о сведéнии проблемы останова

Доказательство. $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, $w \in \mathfrak{A}^* \quad \rightsquigarrow \quad \sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}$

$\varphi_{M,w} = \psi_0 \,\&\, \psi_\mathcal{P} \to \psi_f$; $\psi_0 = \mathrm{Re}(\tau_{(\Lambda, q_0, w\Lambda)})$; $\psi_f = \exists\alpha\, \exists\beta\, \mathrm{Re}(\alpha, q_f, \beta)$

$\underline{\textbf{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow \textbf{Valid}(\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w})\ ?}$

($\Rightarrow$): Рассмотрим (конечное) вычисление M на w:

$$(\Lambda, q_0, w\Lambda) \to_M (\alpha_1, q_1, \beta_1) \to_M \cdots \to_M (\alpha_n, q_n, \beta_n);\ q_n = q_f$$

Справедливы следующие соотношения:

- $\psi_0, \psi_\mathcal{P} \models \mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_1, q_1, \beta_1)})$
- $\mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_1, q_1, \beta_1)}), \psi_\mathcal{P} \models \mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_2, q_2, \beta_2)})$
- $\dots$
- $\mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_{n-1}, q_{n-1}, \beta_{n-1})}), \psi_\mathcal{P} \models \mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_n, q_f, \beta_n)})$

При этом $\mathrm{Re}(\tau_{(\alpha_n, q_f, \beta_n)}) \models \exists\alpha\, \exists\beta\, \mathrm{Re}(\alpha, q_f, \beta)$

Следовательно, $\psi_0, \psi_\mathcal{P} \models \psi_f$

По *теореме о логическом следствии*, верно и $\models \psi_0 \,\&\, \psi_\mathcal{P} \to \psi_f$ ▼

Теорема Чёрча

Проблема общезначимости формул логики предикатов неразрешима

Доказательство.

По *лемме о сведéнии проблемы останова*,
эта проблема (**Halt**) m-сводима
к проблеме общезначимости формул логики предикатов (**Valid**)

Известно, что проблема **Halt** неразрешима

Значит, по *следствию из теоремы об m-сводимости*,
неразрешима и проблема **Valid** ▼