1 Семинирское занятие. Автоматные преобразователи. ω-автоматы. Логика S1S

Задача 1. Выяснить, являются ли указанные словарные отношения рациональными. Построить конечный автомат-преобразователь для тех отношений, которые являются рациональными.

1. $R_< \subseteq \{0,1\}^2$, $(u,v) \in R \Leftrightarrow (u)_2 < (v)_2$;
2. $R_> \subseteq \{0,1\}^2$, $(u,v) \in R \Leftrightarrow (u)_2 > (v)_2$;
3. $R_{\times 2} \subseteq \{0,1\}^2$, $(u,v) \in R \Leftrightarrow (u)_2 = (v)_2 + (v)_2$;
4. $R_{\times 2} \subseteq \{0,1\}^2$, $(u,v) \in R \Leftrightarrow (u)_2 = (v)_2 \times (v)_2$;
5. $R_{\mathcal{A}} \subseteq \Sigma^2$, $(u,v) \in R \Leftrightarrow uv \in L(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — некоторый конечный автомат-распознаватель;
6. $\widehat{R}_{\mathcal{A}} \subseteq \Sigma^2$, $(u,v) \in R \Leftrightarrow uv^{-1} \in L(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — некоторый конечный автомат-распознаватель;
7. $R_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \subseteq \Sigma^2$, $(u,v) \in R \Leftrightarrow u \in L(\mathcal{A}), v \in L(\mathcal{B})$, где $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — некоторые конечные автоматы-распознаватели.

Задача 2. Построить автоматы Бюхи и записать формулы логики S1S, которые задают следующие ω-языки в алфавите $\Sigma = \{a, b\}$:

1. $L(ab^\omega)$;
2. $L(a^*ba^\omega)$;
3. $L((ab)^\omega)$;
4. $L = \{\alpha : \alpha \in \{a,b\}^\omega$, в α буквы a находятся только в позициях с нечетными номерами$\}$;
5. $L = \{\alpha : \alpha \in \{a,b\}^\omega, \alpha$ имеет нечетное число вхождений буквы $a\}$;
6. $L = \Sigma^\omega \setminus L(a^*ba^\omega)$;

Задача 3. Выразимы ли следующие отношения на множестве натуральных чисел S1S формулами?

1. $\{(n,m) : n \leq m\}$;
2. $\{(k,n,m) : k + n = m\}$.

Задача 4. Какие ω-языки описывают следующие S1S формулы

1. $\varphi(X) = \exists X_1 \exists X_2 \forall x \forall y (X_1(x) \wedge X_2(y) \to (X(x) \wedge \neg X(y) \wedge x < y))$;
2. $\varphi(X,Y) = X(0) \wedge \forall x (X(x) \to Y(s(x)))$;
3. $\varphi(X) = \forall x (X(s(x)) \to X(x))$.