Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 48

Модальные логики

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

1: **Зима близко**

2: **Зима всегда близко**

3: **Зима бывает близко**

Если отбросить всё лишнее, то
для высказывания *1* справедлива одна из двух оценок:
правда, если зима действительно близко, и
неправда, если это не так

Смысл высказываний *2* и *3* *тесно связан* со смыслом *1*:
если $x =$ «зима близко», то

1: x *2:* всегда x *3:* иногда бывает x

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

1: **Зима близко**

2: **Зима всегда близко**

3: **Зима бывает близко**

Слова, используемые как уточнение истинностной оценки высказывания, называются модальностями (*лат. modus — мера*)

«Всегда» и «иногда» — это темпоральные модальности (модальности времени) (*лат. tempus — время*)

Можно сказать, что «всегда» и «иногда» — это $\forall$ и $\exists$, но тогда:

- Какими предметами задаётся время, и каковы свойства этих предметов?
- Как устроить анализ смысла высказываний в интерпретациях с такими предметами?

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

1: **Зима близко**

2: **Я знаю, что зима близко**

3: **Я допускаю возможность того, что зима близко**

Смысл высказываний *2* и *3* *тесно связан* со смыслом *1*:
если $x =$ «зима близко», то

1: x *2:* известно, что x *3:* допустимо x

«Известно» и «допустимо» — это эпистемические модальности (модальности знания) (*др.-греч.* ἐπιστήμη — *знание*)

Если «известно» (*всеобщее знание*)
и «допустимо» (*частное, некоторое знание*) трактовать как $\forall$ и $\exists$,
то на какие «предметы знаний» указывают эти кванторы?

Модальности

Рассмотрим такие высказывания:

1: **Зима близко**

2: **Зима должна быть близко**

3: **Зима имеет право быть близко**

Смысл высказываний *2* и *3* *тесно связан* со смыслом *1*:
если $x =$ «зима близко», то

1: x *2:* должно быть x *3:* имеет право быть x

«Должен» и «имеет право» — это деонтические модальности (модальности долга) (*др.-греч.* δέον — *должное*)

Как связан смысл фраз «это так» и «это должно быть так»?

В *рациональных* высказываниях используется великое множество разных модальностей, и точно описать их смысл в рамках классической логики — очень непростая задача

Модальности

Часто (*хотя и не всегда*) в высказываниях используются модальности двух двойственных видов:

Модальность необходимого	**Модальность возможного**
необходимо	возможно
обязательно	не исключено
всегда	иногда
должен	имеет право
знает	предполагает
доказуемо	непротиворечиво
$\Box$	$\Diamond$

Хотелось бы иметь единообразный способ определения смысла модальностей $\Box$ и $\Diamond$ — и такой способ используется в

модальных логиках

Модальные логики: синтаксис

Синтаксис формул модальной логики высказываний
над множеством пропозициональных переменных Var:

$$\varphi \ ::= \ \mathtt{x} \ | \ (\neg\varphi) \ | \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ | \ (\varphi \vee \varphi) \ | \ (\varphi \to \varphi) \ | \ (\Box\varphi) \ | \ (\Diamond\varphi) \ ,$$

где φ — формула и $\mathtt{x} \in \mathrm{Var}$

Это синтаксис формул логики высказываний,
расширенный возможностью расстановки модальностей
необходимого и возможного над любыми (под)формулами

Приоритет операций: $\neg$, $\Box$ и $\Diamond$; затем $\&$; затем $\vee$; затем $\to$

Пример формулы: $\Diamond\mathtt{x} \,\&\, \Box\neg\Diamond(\mathtt{x} \vee \mathtt{y})$
«*возможно* $\mathtt{x}$, *и при этом необходимо невозможно, что* $\mathtt{x}$ *или* $\mathtt{y}$»

В этой формуле не говорится,
что означают «необходимость» и «возможность»:
точный смысл $\Box$ и $\Diamond$ — это часть семантики формулы

Модальные логики: семантика Крипке

Описание семантики начнём с примера: **Зима всегда близко**

Представим себе любое строгое определение зимы
и того, в каких случаях зима считается близкой

Если остановить время и задаться вопросом, близко зима или нет,
то ответ на этот вопрос (**да** или **нет**) можно представить как
значение пропозициональной переменной x

Время течёт, и мир меняется, как и значение x:

$$\underset{x}{\text{сейчас}} \longrightarrow \underset{x}{\text{через минуту}} \longrightarrow \underset{x}{\text{через месяц}} \longrightarrow \underset{\neg x}{\text{через полгода}}$$

Ответ на вопрос «$\Box x$?» в так меняющемся мире — **нет**, не всегда x

Изменение мира можно представить себе и по-другому:
существует много взаимосвязанных миров с разными значениями x,
и в семантике $\Box$ комбинируются значения x многих миров

Модальные логики: семантика Крипке

Модель Крипке (над переменными Var) — это система $(W, \mapsto, L)$, где:

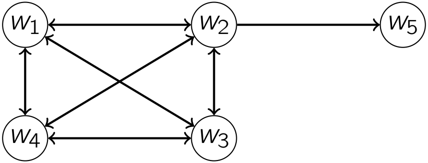
- W — непустое множество миров (или, по-другому, — состояний)
- $\mapsto \subseteq W \times W$ — отношение переходов между мирами
  - Если $w \mapsto w'$, то w' — мир, альтернативный для w (w-альтернатива)
- $L : W \to 2^{\mathrm{Var}}$ — оценка переменных для каждого мира
  - «$\mathtt{x} \in L(w)$» = «переменная $\mathtt{x}$ истинна в мире w»

Модель Крипке — это интерпретация для формул модальной логики

Шкала Крипке (*Kripke frame*),
на которой основывается модель $(W, \mapsto, L)$, — это пара $(W, \mapsto)$

Модальные логики: семантика Крипке

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$



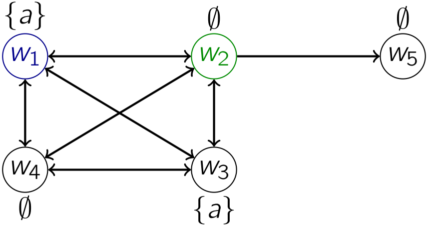
— это шкала Крипке

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \mathrm{x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{x} \in L(w)$ $\qquad (\mathrm{x} \in \mathrm{Var})$
- $\mathcal{I}, w \models \varphi \mathbin{\&} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \models \varphi$ и $\mathcal{I}, w \models \psi$
- $\mathcal{I}, w \models \varphi \vee \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \models \varphi$ или $\mathcal{I}, w \models \psi$

Например, $\qquad (\mathrm{Var} = \{a\})$



— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

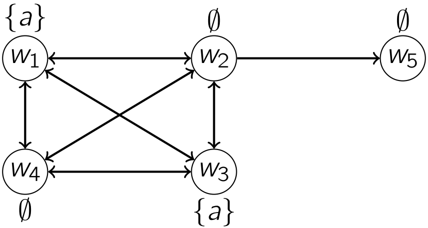
$$\mathcal{I}, w_1 \models a, \qquad \mathcal{I}, w_2 \not\models a$$

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \varphi \to \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \not\models \varphi$ или $\mathcal{I}, w \models \psi$
- $\mathcal{I}, w \models \neg\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}, w \not\models \varphi$

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$



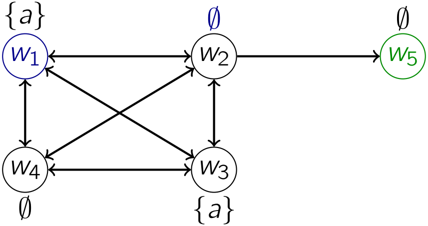
— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi \quad \Leftrightarrow$
  для любой w-альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$



— это модель Крипке $(\mathcal{I})$

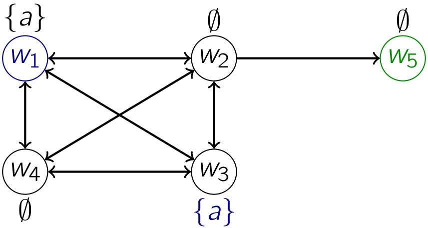
$$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Box a, \qquad \mathcal{I}, w_5 \models \Box a$$

Модальные логики: семантика Крипке

Отношение выполнимости $\models$ для модели $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$ и мира $w \in W$ определяется так:

- $\mathcal{I}, w \models \Diamond\varphi \quad \Leftrightarrow$
  существует w-альтернатива w',
  такая что верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$

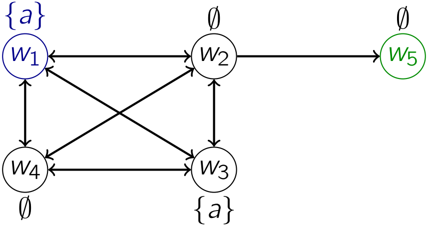


— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Diamond a, \qquad \mathcal{I}, w_5 \not\models \Diamond a$$

Модальные логики: семантика Крипке

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$

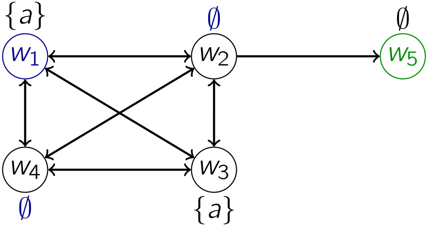


— это модель Крипке ($\mathcal{I}$)

$$\mathcal{I}, w_1 \models \Box\Diamond a, \qquad \mathcal{I}, w_5 \models \Box\Diamond a$$

Модальные логики: семантика Крипке

Например, $(\mathrm{Var} = \{a\})$



— это модель Крипке $(\mathcal{I})$

$\mathcal{I}, w_1 \not\models \Diamond\Box a$, $\quad \mathcal{I}, w_2 \models \Diamond\Box a \quad$, $\mathcal{I}, w_5 \not\models \Diamond\Box a$

Модальные логики: семантика Крипке

Пусть $\mathcal{F}$ — шкала Крипке, $\mathcal{I}$ — модель Крипке, и φ, ψ — формулы модальной логики

Тогда

- формула φ истинна в модели $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \models \varphi$), если для любого мира w модели $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I}, w \models \varphi$
- формула φ истинна на шкале $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \models \varphi$), если для любой модели Крипке $\mathcal{J}$, основанной на $\mathcal{F}$, верно $\mathcal{J} \models \varphi$
- формула φ общезначима ($\models \varphi$), если для любой шкалы $\mathcal{F}$ верно $\mathcal{F} \models \varphi$
- формулы φ и ψ равносильны ($\varphi \sim \psi$), если $\models \varphi \leftrightarrow \psi$

Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

Утверждение. **Для любой формулы φ верно: $\Box\varphi \sim \neg\Diamond\neg\varphi$**

Доказательство. «В любой альтернативе выполняется φ» $\sim$ «Не существует альтернативы, в которой φ не выполняется» ▼

Утверждение. **Для любой формулы φ верно: если $\models \varphi$, то $\models \Box\varphi$**

Доказательство. Если φ выполняется в любом мире любой модели, то φ выполняется и в любой альтернативе любого мира любой модели ▼

Законы модальных логик

Модальная логика, как и любая другая, имеет свои законы и свойства, верные независимо от точного смысла модальностей — например:

Утверждение. Для любых формул φ, ψ верно:
$\models \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

Доказательство.

Предположим от противного, что $\not\models \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

Тогда существуют модель $\mathcal{I} = (W, \mapsto, L)$ и мир w, такие что
$\mathcal{I}, w \not\models \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

Тогда по семантике $\to$:

- $\mathcal{I}, w \models \Box(\varphi \to \psi)$, а значит,
  для каждой w-альтернативы w' верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi \to \psi$
- $\mathcal{I}, w \models \Box\varphi$, а значит, для каждой w-альтернативы w'
  верно $\mathcal{I}, w' \models \varphi$ — и, по семантике $\to$, $\mathcal{I}, w' \models \psi$
- $\mathcal{I}, w \not\models \Box\psi$, а значит, существует w-альтернатива w',
  такая что $\mathcal{I}, w' \not\models \psi$, что *противоречит* предыдущему пункту ▼