

Распределённые алгоритмы

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Распределённые алгоритмы

Блок 18

Алгоритм Флойда-Уоршелла

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Перед обсуждением «основного» алгоритма вычисления таблиц маршрутизации (*алгоритма Туэга*), предложим решение смежной задачи — **задачи вычисления весов оптимальных путей для всех пар вершин**: для каждой пары вершин заданного графа (s, d) вычислить вес оптимального пути из s в d в этом графе

Обсуждающийся здесь **алгоритм Флойда-Уоршелла** — это **нераспределённый** алгоритм решения этой задачи, который позже будет «усовершенствован» до алгоритма маршрутизации (т.е. от весов до путей и от нераспределённого до распределённого)

Дано: взвешенный граф $\Gamma = (G, \omega)$, где $G = (V, E)$, не содержащий циклов отрицательного веса

Требуется: для каждой пары вершин s, d вычислить вес $\rho[s, d]$ оптимального пути из s в d

- ▶ (если d недостижимо из s , то будем считать, что этот вес равен ∞)
-

Все вершины пути, кроме первой и последней, назовём **промежуточными**

Для множества вершин W :

- ▶ **W -путём** назовём путь, все промежуточные вершины которого принадлежат множеству W
- ▶ **W -расстоянием** $\rho^W[s, d]$ между вершинами s и d назовём наименьший вес W -пути из s в d

Все описания и утверждения, касающиеся алгоритма Флойд-Уоршелла, формулируются для произвольного взвешенного графа Γ указанного выше вида

Алгоритм Флойда-Уоршелла сперва вычисляет все \emptyset -расстояния и затем расширяет множество промежуточных вершин, пока не будут построены все V -расстояния

Теорема (о W -путях). Для любых вершины s и множества W , $W \subseteq V$, верно следующее:

1. $\rho^W[s, s] = 0$.
2. Для любой вершины d , отличной от s , верно следующее:
 - 2.1 Существует \emptyset -путь из s в $d \Leftrightarrow (s, d) \in E$.
 - 2.2 Если $e = (s, d) \in E$, то $\rho^{\emptyset}[s, d] = \omega_e$, а иначе $\rho^{\emptyset}[s, d] = \infty$.
 - 2.3 Если $W' = W \cup \{v\}$, то верно следующее:
 - 2.3.1 Простой W' -путь из s в d является либо W -путём из s в d , либо последовательным сцеплением W -пути из s в v и W -пути из v в d .
 - 2.3.2 $\rho^{W'}[s, d] = \min(\rho^W[s, d], \rho^W[s, v] + \rho^W[v, d])$.
 - 2.4 Любой путь из s в d является V -путём из s в d .
 - 2.5 $\rho[s, d] = \rho^V[s, d]$.

Д.з. 1. Доказать эту теорему

(и для этого рекомендуется использовать **лемму о простых путях**)

На теореме о W -путях основан алгоритм Флойда-Уоршелла:

1. $W := \emptyset$;
2. Для каждой пары $(s, d) \in V^2$:
 - 2.1 Если $s = d$:
 - 2.1.1 $r[s, d] := 0$;
 - 2.2 Если $(s, d) \in E$:
 - 2.2.1 $r[s, d] := \omega_{(s,d)}$;
 - 2.3 Иначе:
 - 2.3.1 $r[s, d] := \infty$;
3. Пока $W \neq V$:
 - 3.1 Произвольно выбрать $v \in V \setminus W$ (опорную вершину)
 - 3.2 Для каждой пары $(s, d) \in V^2$:
 - 3.2.1 $r[s, d] := \min(r[s, d], r[s, v] + r[v, d])$;
 - 3.3 $W := W \cup \{v\}$;
4. Выдать ответ: $\rho = r$

Теорема (корректность). Для ответа ρ , выдаваемого алгоритмом Флойда-Уоршелла, и любых вершин s, d значение $\rho[s, d]$ — это вес оптимального пути из s в d

Доказательство. По теореме о W -путях:

- ▶ в (2) устанавливаются значения $r = \rho^\emptyset$ согласно пунктам 2.1 и 2.2 теоремы
- ▶ в (3) происходит пересчёт значений $r = \rho^W \rightarrow r = \rho^{W \cup \{v\}}$ согласно пункту 2.3.2 теоремы
- ▶ в (4) выдаётся ответ согласно пункту 2.5 теоремы ▼

Теорема (сложность). Алгоритмом Флойда-Уоршелла выполняется $\Theta(n^3)$ действий (присваиваний и проверок условий), где $n = |V|$

Доказательство.

В цикле (3) выполняется n итераций, и в каждой итерации — $\Theta(n^2)$ действий, а значит, суммарно по всем итерациям — $\Theta(n^3)$ действий

В остальной части алгоритма выполняется по порядку меньше действий (в (1) — одно, в (2) — $\Theta(n^2)$) ▼