

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 56

Размеченные системы переходов

Лектор:

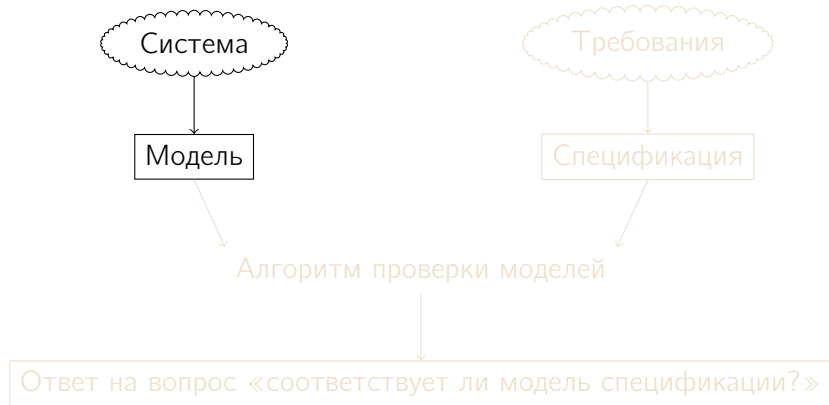
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Вступление (краткая схема проверки моделей)



Размеченные системы переходов

Чтобы лучше понять, как (и почему именно так) устроена модель вычислительной системы, используемая в проверке моделей, рассмотрим **для примера** такую систему

Система состоит из **кофейного автомата** и **покупателя**

Кофейный автомат имеет приёмник монет и кнопки «чай» и «кофе» и запрограммирован на такое поведение:

- ▶ В режиме ожидания приёмник монет открыт
- ▶ После приёма монеты
 - ▶ приёмник закрывается, ожидается нажатие на одну из кнопок,
 - ▶ после нажатия на кнопку соответствующий напиток выдаётся покупателю, монета удаляется из приёмника и автомат переходит в режим ожидания

Покупатель в зависимости от своего желания может кидать монеты в приёмник и нажимать на кнопки

Размеченные системы переходов

Поведение кофейного автомата можно представить себе так

В каждый **момент времени** он находится в некотором **состоянии**:
«ожидает монету», «ожидает нажатия кнопки»,
«выдаёт чай», «выдаёт кофе»

Иногда автомат **переходит** из одного состояния в другое согласно внешним обстоятельствам и своей программе

Некоторое состояние (**начальное**) отвечает запуску программы

Чтобы проверить правильность работы автомата, достаточно выделить набор *простых* свойств состояний (**атомарных высказываний**) и проанализировать изменение этих свойств с течением времени:
«приёмник открыт», «в приёмнике есть монета»,
«выдаётся чай», «выдаётся кофе»

Размеченные системы переходов

AP — так будем обозначать множество **атомарных высказываний**

В качестве модели системы будем использовать **размеченную систему переходов (СП)**¹ $M = (S, S_0, \mapsto, L)$ над AP, устроенную так:

- ▶ (S, \mapsto, L) — это **модель Крипке** над переменными AP, в которой
 - ▶ миры из S называются **состояниями**,
 - ▶ отношение переходов $\mapsto \subseteq S \times S$ **тотально**: для каждого состояния s существует состояние s' , такое что $s \mapsto s'$ — и
 - ▶ оценку переменных $L : S \rightarrow 2^{AP}$ принято называть **функцией разметки** состояний
- ▶ S_0 — множество **начальных** состояний, $S_0 \subseteq S$

СП будем называть **конечной**, если конечны множества её состояний и атомарных высказываний

¹ На самом деле СП — это более широкое понятие, и модель Крипке с начальными мирами (состояниями) является частным случаем такой системы, но сейчас нет смысла всё переусложнять

Размеченные системы переходов

СП представляет собой размеченный ориентированный граф, вершинами которого являются состояния, а дугами — переходы, и поэтому будем использовать для СП терминологию теории графов

Путь в СП будем называть **начальным**, если он исходит из начального состояния

Бесконечный начальный путь будем называть **вычислением** СП

Вычисления СП отвечают (*потенциально*) бесконечным сценариям выполнения моделируемой системы

Размеченные системы переходов

Пример: СП кофейного автомата

Атомарные высказывания:

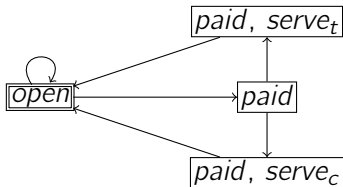
$open$ = «приёмник открыт»

$serve_t$ = «выдаётся чай»

$paid$ = «в приёмнике есть монета»

$serve_c$ = «выдаётся кофе»

СП:



□ — состояние

▣ — начальное состояние

Высказывания, размечающие состояние,
записаны внутри этого состояния

Система переходов программы

Математически строгий анализ императивной программы π (и программ других парадигм в рамках операционной семантики), как правило, основан на понятиях, которые уже появлялись в лекциях:

- ▶ **Состояние управления:**
то, какую часть программы осталось выполнить
- ▶ **Состояние данных:** то, как устроены данные, преобразуемые программой на каждом шаге (например, **оценки переменных** или **запросы**)
- ▶ **Состояние вычисления,**
включающее в себя состояние данных и состояние управления
- ▶ Отношение \rightarrow_{π} **шага вычисления** программы π

Система переходов программы

Программе π отвечает СП (S, S_0, \mapsto, L) над AP, где:

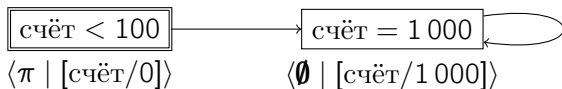
- ▶ S — множество всех состояний вычисления π
- ▶ S_0 — состояния, с которых начинаются вычисления π на интересующих входных данных
- ▶ $\mapsto \Rightarrow \rightarrow_{\pi}$ с поправкой на требуемую **тотальность**: если из состояния s не исходит ни одного перехода, то в \mapsto «насильно» добавляется переход $s \mapsto s$
- ▶ AP суть интересующие свойства состояний вычисления, например:
 - ▶ « $x = 2$ », « $x > 2$ », « $x > y$ »
 - ▶ «Состояние управления — это пустая команда»
 - ▶ «Предикатный символ левой подцели — P »
- ▶ $L(s)$ состоит из всех атомарных высказываний, истинных для s согласно естественной трактовке их записи

Система переходов программы

Пример

$\pi = \text{счёт} := \text{счёт} + 1\ 000;$

Достижимый фрагмент СП этой модельной императивной программы для интерпретации $Ar_{\mathbb{Z}}$, начальной оценки $[\text{счёт}/0]$ и атомарных высказываний «счёт < 100» и «счёт = 1 000»:



Система переходов программы

Другой пример

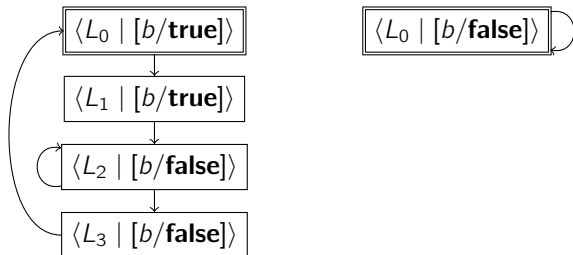
Пусть в **сетевом принтере** содержится булев регистр b ,
обозначающий *занятость* принтера,

и доступ к нему осуществляется при помощи такой программы π :

```
while (true) {     $L_0$  : while (!b);   $L_1$  :  $b = \mathbf{false}$ ;  
                   $L_2$  : EXCHANGE   $L_3$  :  $b = \mathbf{true}$ ;  }
```

(*EXCHANGE* — подпрограмма обмена данными для печати)

Фрагмент СП для π , достижимый из начальных состояний
с произвольным начальным значением b , может быть устроен так
(для простоты считаем, что метка состояния — это оно само):



Система переходов программы в окружении

Программа в распределённой системе может взаимодействовать со своим **окружением** при помощи **разделяемых переменных**, **сообщений**, **сигналов**, ...

Такое взаимодействие выражается в том, что состояние вычисления программы может измениться под воздействием окружения

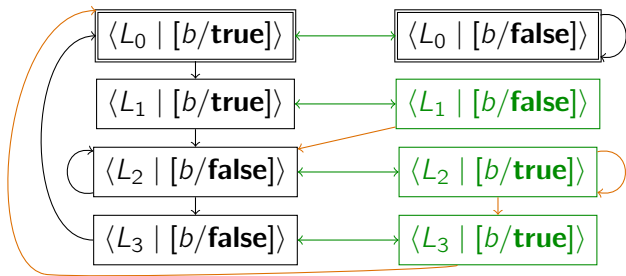
СП программы в окружении — это СП программы, в которую добавлены переходы, отвечающие возможностям окружения

Система переходов программы в окружении

Пример

```
while (true) {  
    L0 : while (!b); L1 : b = false;  
    L2 : EXCHANGE L3 : b = true;  
}
```

СП для программы доступа к сетевому принтеру в окружении, способном произвольно изменять значение регистра b , может быть устроена так:



Параллельная композиция систем переходов

Наиболее популярный способ композиции СП параллельно выполняющихся программ — это **асинхронная композиция** (согласно **семантике чередующихся вычислений**; *interleaving*)

Это способ композиции устроен так:

- ▶ Состояние композиции компонентов представляет собой набор локальных частей их состояний и *включённую один раз* общую (разделяемую) часть
- ▶ Переход в композиции отвечает
 - ▶ произвольному выбору одного из компонентов и перехода в нём и
 - ▶ выполнению этого перехода с изменением локальной части состояния компонента и общей части состояния согласно устройству СП компонента системы

В вычислении построенной так композиции произвольно **чередуются** выполнение переходов компонентов системы

Параллельная композиция систем переходов

Пример

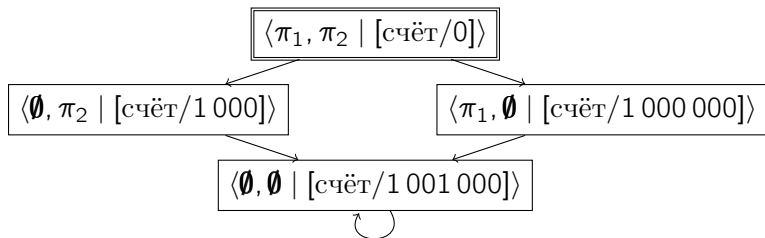
$$\pi_1 = \text{счёт} := \text{счёт} + 1\ 000; \quad \pi_2 = \text{счёт} := \text{счёт} + 1\ 000\ 000;$$

Достижимый фрагмент асинхронной композиции СП

этих двух **модельных императивных программ**

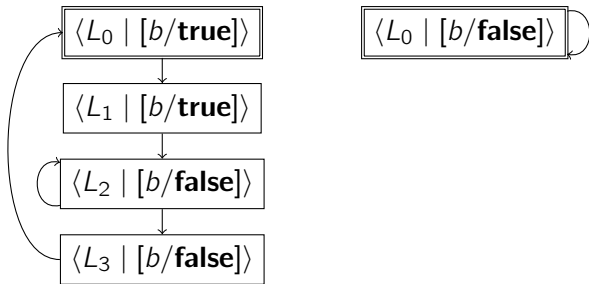
с общей переменной «счёт»

для интерпретации Ar_Z и начальной оценки [счёт/0] устроен так:



Параллельная композиция систем переходов

Другой пример



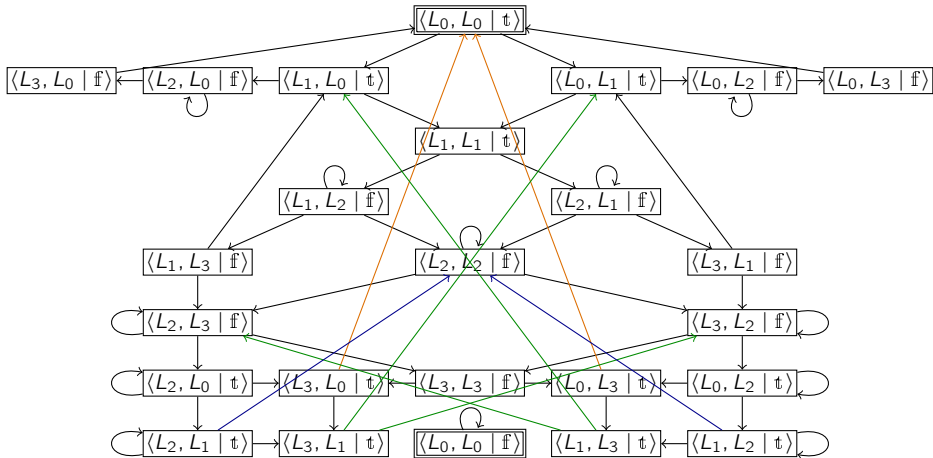
Предположим, что

- ▶ с сетевым принтером взаимодействуют две программы с одинаковыми СП (как изображено выше) и
- ▶ регистр b является общим для обеих программ

Тогда асинхронная композиция СП, отвечающая параллельному выполнению двух программ доступа к принтеру, устроена так ...

Параллельная композиция систем переходов

Другой пример



Согласно методу проверки моделей, построение и анализ композиции СП производится автоматически, так что «нечитаемость» композиции не считается недостатком