Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы
$\to$ Математические модели последовательных вычислений

Блок 9

Проблемы R-включения и R-эквивалентности сетей Петри

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Вступление

Проблема эквивалентности — это ключевая (фундаментальная) проблема, формулирующаяся для модели вычислений после её разработки и имеющая такую неформальную постановку:

- Задаётся класс вычислительных объектов:
  - Синтаксис: запись объектов
  - Семантика: смысл объектов (реализуемая функция, распознаваемый язык, ...)
- Вводится понятие схожести (эквивалентности) семантик
- Проблема состоит в проверке эквивалентности семантик двух произвольных объектов заданного класса

Если семантика вычислительного объекта представляет собой множество (например, распознаваемый язык), то тесно связанной с проблемой эквивалентности оказывается проблема включения: для произвольных заданных объектов проверить теоретико-множественное включение семантики первого объекта в семантику второго объекта

Тогда проверку эквивалентности объектов π_1, π_2 можно устроить как проверку включения π_1 в π_2 и π_2 в π_1

Проблема R-включения

Множество $R(\pi)$ достижимых разметок сети Петри можно понимать как распознаваемый ей язык

Тогда проблема R-включения для сетей Петри формулируется так: для произвольных заданных маркированных сетей Петри π_1, π_2 с равными множествами позиций проверить включение $R(\pi_1) \subseteq R(\pi_2)$

Теорема. Проблема включения для диофантовых многочленов m-сводится к проблеме включения для сетей Петри

Доказательство.

Достаточно показать, как для заданной пары диофантовых многочленов P, Q с неотрицательными коэффициентами построить маркированные сети Петри Π_P, Π_Q с равными множествами позиций, такие что

$$P \leq Q \quad \Leftrightarrow \quad R(\Pi_P) \subseteq R(\Pi_Q)$$

Вспомнив теорему из блока 8, начнём с сетей π_P, π_Q, таких что

$\mathcal{C}(P) = \{(M(p_1), \dots, M(p_n)) \mid M \in R(\pi_P)\}$ и

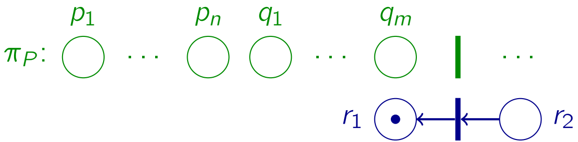
$\mathcal{C}(Q) = \{(M(p_1), \dots, M(p_n)) \mid M \in R(\pi_Q)\}$

Без ограничения общности будем считать, что помимо $p_1, \dots, p_n$ в этих сетях содержатся одни и те же позиции $q_1, \dots, q_m$

Проблема R-включения

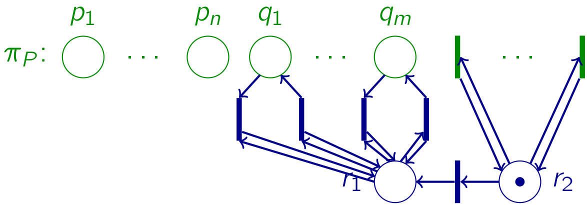
Доказательство.

Сеть Π_P устроим как π_P с такой надстройкой:



Тогда $R(\Pi_P) \subseteq \mathcal{C}(P) \times \mathbb{N}_0^m \times \{0,1\}^2$

Сеть Π_Q устроим как π_Q с такой надстройкой:



Тогда $R(\Pi_Q) \supseteq \mathcal{C}(Q) \times \mathbb{N}_0^m \times \{0,1\}^2$

Следовательно, $\mathcal{C}(P) \subseteq \mathcal{C}(Q) \Leftrightarrow R(\pi_P) \subseteq R(\pi_Q)$ ▼

Следствие. Проблема R-включения для сетей Петри неразрешима

Проблема R-эквивалентности

Проблема R-эквивалентности для сетей Петри формулируется так: для произвольных заданных сетей Петри π_1, π_2 проверить соотношение $R(\pi_1) = R(\pi_2)$

Теорема. Проблема R-включения для сетей Петри m-сводима к проблеме R-эквивалентности для сетей Петри

Доказательство.

Достаточно показать, как для произвольной пары сетей π_1, π_2 построить пару сетей Π_1, Π_2, такую что

$$R(\pi_1) \subseteq R(\pi_2) \quad \Leftrightarrow \quad R(\Pi_1) = R(\Pi_2)$$

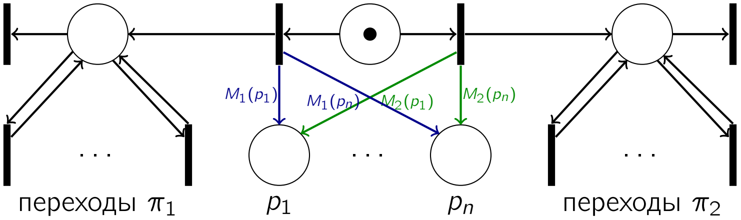
Для ясности положим, что $\{p_1, \ldots, p_n\}$ — множество позиций π_1 и π_2, M_1 и M_2 — их начальные разметки, и что множества переходов π_1 и π_2 не пересекаются

Проблема R-эквивалентности

Доказательство.

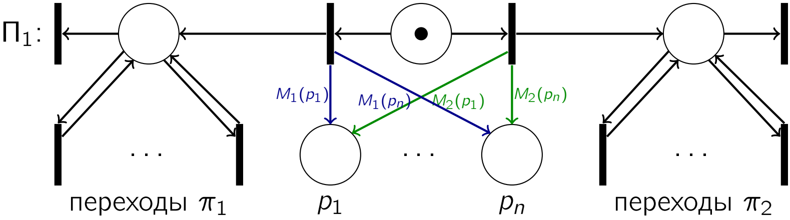
Сеть Π_1 устроим так:

- Позиции: $p_1, \ldots, p_n, q_0, q_1, q_2$
- Начальная разметка: в q_0 лежит одна фишка, больше фишек нет
- Выполнение Π_1:
  - Недетерминированно выбирается одна из исходных сетей π_1, π_2, этот выбор отмечается фишкой в q_1 или q_2
  - В $p_1, \ldots, p_n$ кладутся фишки согласно начальной разметки выбранной сети π_i
  - Активируются и выполняются переходы выбранной сети π_i
  - Можно произвольно завершить выполнение, удалив фишку из q_i



Проблема R-эквивалентности

Доказательство.



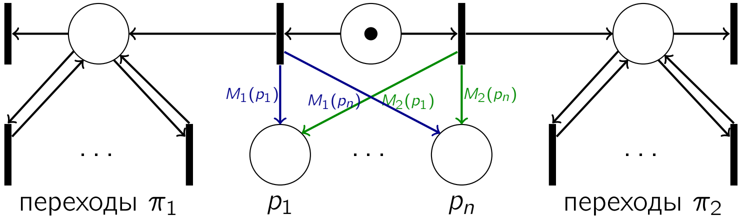
Достижимые разметки этой сети, помимо начальной, — это

- достижимые разметки π_1 с фишкой в q_1 (R_1^+) и без неё (R_1^-) и
- достижимые разметки π_2 с фишкой в q_2 (R_2^+) и без неё (R_2^-)

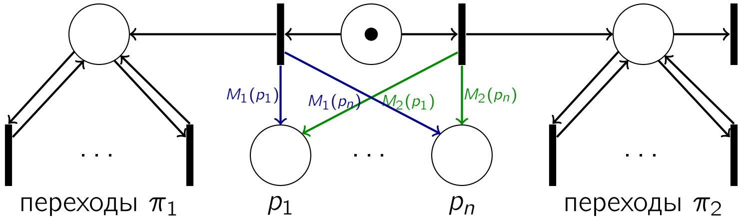
Проблема R-эквивалентности

Доказательство.

Π_1:



В сети Π_2 устроим всё то же самое, но без возможности удалить фишку из q_1:



Достижимые разметки этой сети, кроме начальной, — это $R_1^+ \cup R_2^+ \cup R_2^-$

Проблема R-эквивалентности

Доказательство.

Если $R(\pi_1) \subseteq R(\pi_2)$, то $R_1^- \subseteq R_2-$

Значит, $R_1^+ \cup R_1^- \cup R_2^+ \cup R_2^- = R_1^+ \cup R_2^+ \cup R_2^-$

То есть $R(\Pi_1) = R(\Pi_2)$

Иначе $Y_1 \not\subseteq Y_2$, и тогда верно $Y_1 \cup Y_2 \neq Y_2$

Так как $(X_1 \cup X_2) \cap (Y_1 \cup Y_2) = \emptyset$, то верно
$X_1 \cup Y_1 \cup X_2 \cup Y_2 \neq X_1 \cup X_2 \cup Y_2$

Следовательно, $R(\pi) \neq R(\widetilde{\pi})$

Итог: $R(\pi_1) \subseteq R(\pi_2) \Leftrightarrow R(\Pi_1) = R(\Pi_2)$ ▼

Следствие. Проблема R-эквивалентности для сетей Петри неразрешима