

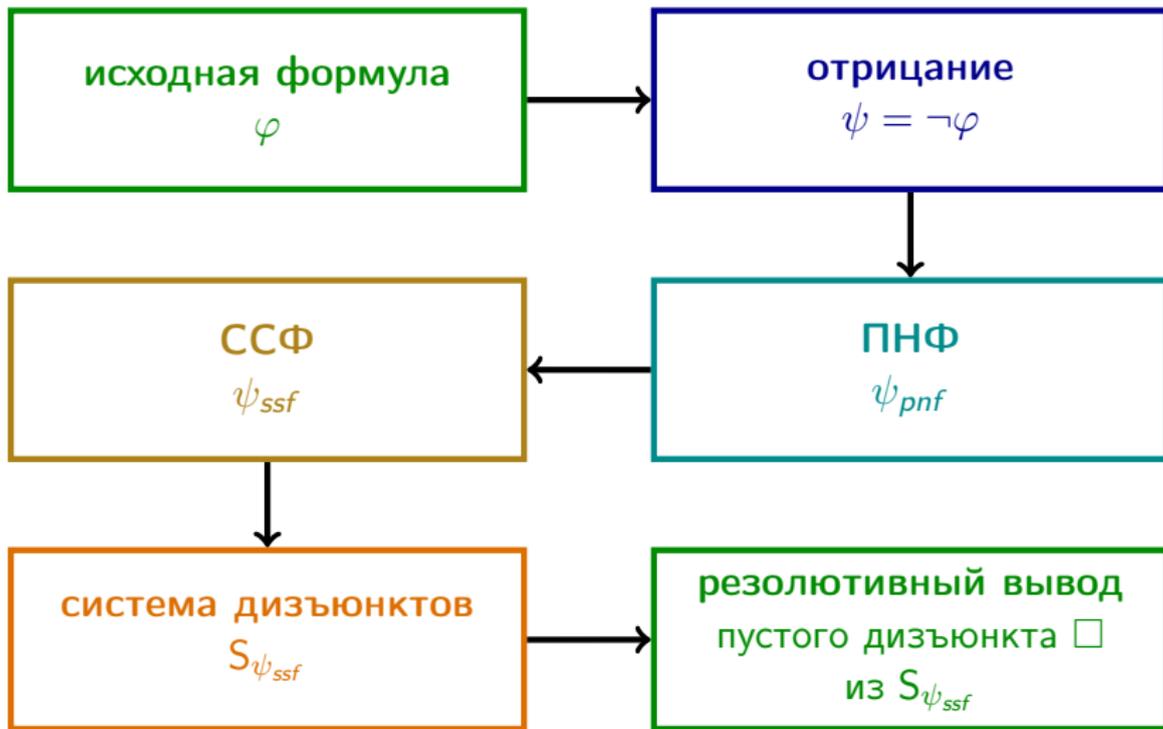
# Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

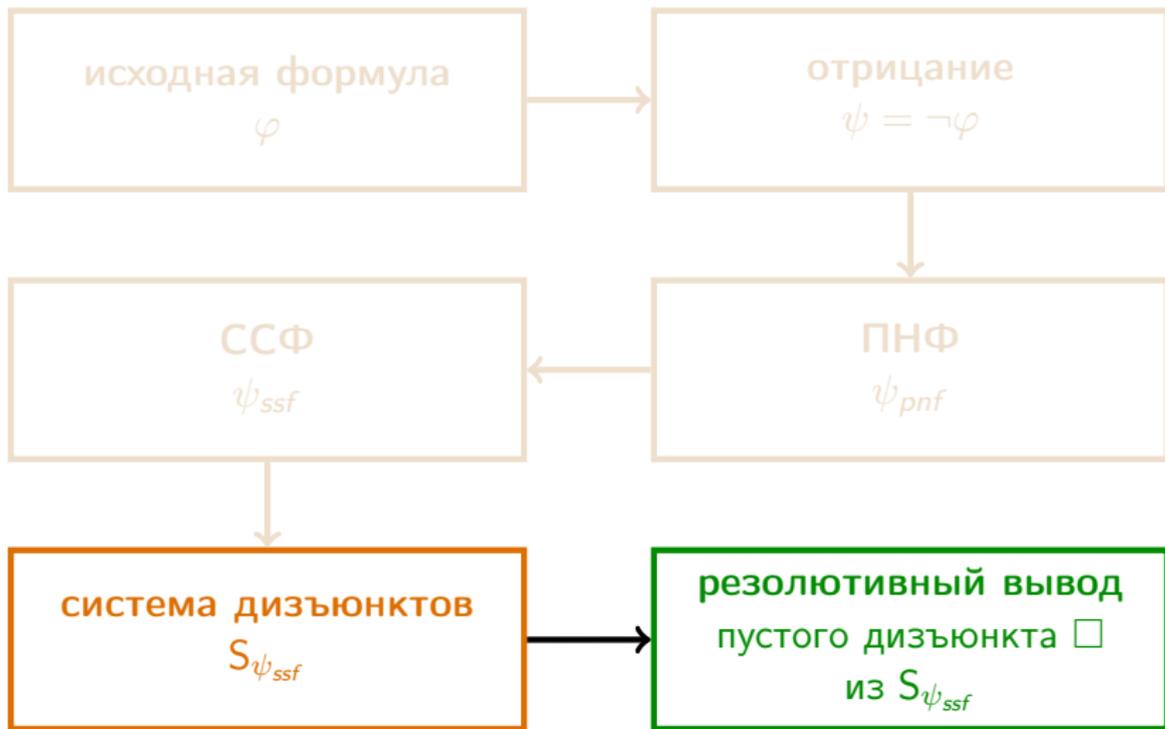
## Блок 20

Композиция подстановок  
Постановка задачи унификации

Лектор:  
Подымов Владислав Васильевич  
E-mail:  
**valdus@yandex.ru**



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}}$$



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

# Противоречия в системах дизъюнктов

На последних этапах метода резолюций  
требуется проверить выполнимость системы дизъюнктов

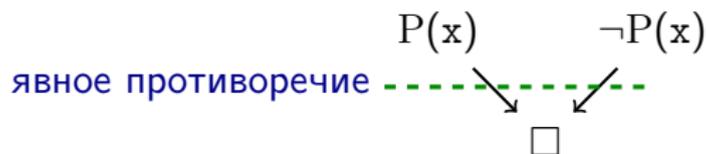
Попробуем, по аналогии с **методом семантических таблиц**,  
придумать способ извлечения явных противоречий из скрытых (неявных)

В качестве явного противоречия  
будем использовать **пустой дизъюнкт** ( $\square$ )

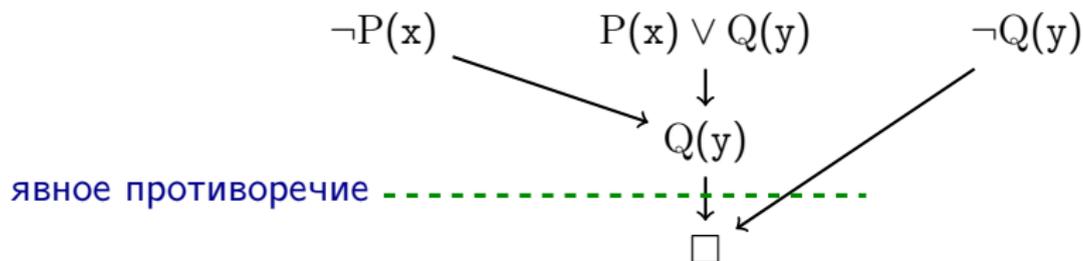
Начнём издалека: приведём несколько примеров того,  
как можно было бы «разумно» и «просто» извлечь  $\square$   
из невыполнимой системы дизъюнктов

# Противоречия в системах дизъюнктов

$\not\models \{P(x), \neg P(x)\}$ :



$\not\models \{\neg P(x), \neg Q(y), P(x) \vee Q(y)\}$ :

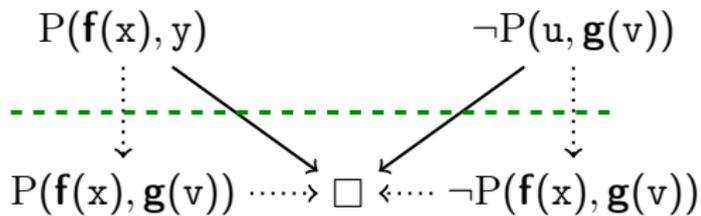


$\forall x \neg P(x), \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)) \models \forall y Q(y)$

# Противоречия в системах дизъюнктов

$$\not\models \{P(\mathbf{f}(x), y), \neg P(u, \mathbf{g}(v))\}$$

не очень явное противоречие



$$\forall x \forall y P(\mathbf{f}(x), y) \models \forall x \forall v P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v))$$

$$\forall u \forall v \neg P(u, \mathbf{g}(v)) \models \forall x \forall v \neg P(\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(v))$$

Чтобы обнаружить **не очень явное противоречие** в системе дизъюнктов, потребовалось привести атомы дизъюнктов к **общему виду**

Приведение выражений к общему виду называется **унификацией**, и перед описанием последнего этапа метода резолюций (**резолютивного вывода**  $\square$ ) необходимо строго сформулировать и научиться решать эту задачу

# Композиция подстановок

Унификация атомов  $A$ ,  $B$  достигается применением к ним подстановки  $\theta$ , такой что  $A\theta = B\theta$

## Напоминание

Подстановка — это отображение  $\theta : \text{Var} \rightarrow \text{Term}$

Конечная подстановка задаётся множеством связей:

$$\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$$

$E\theta$  — это результат применения подстановки  $\theta$  к выражению  $E$

Чтобы поставить и решить задачу унификации, исследуем основные алгебраические свойства подстановок

# Композиция подстановок

Композиция подстановок  $\theta$  и  $\eta$  — это подстановка  $\theta\eta$ , такая что для любой переменной  $x$  верно равенство

$$x(\theta\eta) = (x\theta)\eta$$

## Утверждение

Пусть  $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$  и  $\eta = \{y_1/s_1, \dots, y_k/s_k\}$ . Тогда

$$\theta\eta = \{x_i/t_i\eta \mid 1 \leq i \leq n, x_i \neq t_i\eta\} \\ \cup \{y_j/s_j \mid 1 \leq j \leq k, y_j \notin \{x_1, \dots, x_n\}\}$$

**Доказательство.** Рассмотрим переменную  $z \in \text{Var}$

Если  $z \notin \text{Dom}_\theta \cup \text{Dom}_\eta$ , то  $z(\theta\eta) = (z\theta)\eta = z\eta = z$

Если  $z = y_j \in \text{Dom}_\eta \setminus \text{Dom}_\theta$ , то  $z(\theta\eta) = (z\theta)\eta = z\eta = s_j$

Иначе  $z = x_i \in \text{Dom}_\theta$ , и  $z(\theta\eta) = (z\theta)\eta = t_i\eta$



# Композиция подстановок

## Пример

$$\theta = \{x/f(x, c), y/g(u), z/y\}$$

$$\eta = \{x/g(y), y/z, u/c\}$$

$$\theta\eta = ?$$

$$\{x/f(x, c)\eta, y/g(u)\eta, z/y\eta\} \cup \{u/c\}$$

$$\{x/f(g(y), c), y/g(c), z/z\} \cup \{u/c\}$$

$$\{x/f(g(y), c), y/g(c)\} \cup \{u/c\}$$

$$\theta\eta = \{x/f(g(y), c), y/g(c), u/c\}$$

## Задача унификации

Подстановка  $\theta$  называется **унификатором** выражений  $E_1, E_2$ , если  $E_1\theta = E_2\theta$

$\mathcal{U}(E_1, E_2)$  — множество всех унификаторов выражений  $E_1, E_2$

Выражения  $E_1, E_2$  **унифицируемы**, если  $\mathcal{U}(E_1, E_2) \neq \emptyset$

### Утверждение

Для любых подстановок  $\theta, \eta$  и любых выражений  $E_1, E_2$  верно:  
если  $\theta \in \mathcal{U}(E_1, E_2)$ , то  $\theta\eta \in \mathcal{U}(E_1, E_2)$

### Доказательство.

$\theta \in \mathcal{U}(E_1, E_2) \Leftrightarrow E_1\theta = E_2\theta \Rightarrow E_1\theta\eta = E_2\theta\eta \Leftrightarrow \theta\eta \in \mathcal{U}(E_1, E_2) \quad \blacktriangledown$

Подмножество  $S$  множества подстановок  $\Theta$  называется **полным** в  $\Theta$ , если любая подстановка  $\theta$  из  $\Theta$  представима в виде  $\theta = \eta\mu$ , где  $\eta \in S$

Подстановка  $\theta$  называется **наиболее общим унификатором** выражений  $E_1, E_2$ , если множество  $\{\theta\}$  является полным в  $\mathcal{U}(E_1, E_2)$

$\text{НОУ}(E_1, E_2)$  — множество всех наиболее общих унификаторов выражений  $E_1, E_2$

# Задача унификации

## Пример

Рассмотрим два атома:

$$A = P(f(x), y) \quad B = P(u, g(v))$$

Подстановка  $\eta = \{y/g(g(v)), u/f(c), v/g(v), x/c\}$  — унификатор атомов  $A$  и  $B$  (то есть  $\eta \in \mathcal{U}(A, B)$ ), т.к.

$$P(f(x), y)\eta = P(f(c), g(g(v))) = P(u, g(v))\eta$$

А подстановка  $\theta = \{y/g(v), u/f(x)\}$  — более общий унификатор  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} P(f(x), y)\theta &= P(f(x), g(v)) = P(u, g(v))\theta \\ \eta &= \theta\{v/g(v), x/c\} \end{aligned}$$

На самом деле  $\theta$  — наиболее общий унификатор атомов  $A$  и  $B$   
(но как это доказать?)

А выражения  $P(x, f(x))$  и  $P(g(y), y)$  неунифицируемы  
(а это как доказать?)

## Задача унификации

формулируется следующим образом:

для заданных выражений  $E_1, E_2$   
выяснить, унифицируемы ли эти выражения,  
и если это так, то вычислить  
множество унификаторов, полное в  $\mathcal{U}(E_1, E_2)$