Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 15

Равносильность формул

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Вступление

Из булевой алгебры:

$$A \vee B \to (C \,\&\, D \to E)$$

$$\mapsto \qquad (x \to y \mapsto \neg x \vee y)$$

$$\neg(A \vee B) \vee \neg(C \,\&\, D) \vee E$$

$$\mapsto \qquad (\neg(x \,\&\, y) \mapsto \neg x \vee \neg y;\ \ldots \mapsto \ldots)$$

$$\neg A \,\&\, \neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee E$$

$$\mapsto \qquad (\ldots \mapsto \ldots)$$

$$(\neg A \vee \neg C \vee \neg D \vee E) \,\&\, (\neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee E)$$

Нижняя формула получена из верхней
при помощи основных тождеств булевой алгебры

Значит, можно быть уверенным в том,
что эти формулы имеют одинаковый смысл

Неплохо было бы (*и для метода резолюций, и в целом*)
уметь преобразовывать формулы **логики предикатов**
с гарантированным сохранением их смысла

Равносильность формул

Эквивалентность (логическая связка):

$$\varphi \leftrightarrow \psi \text{ — это сокращение для формулы } (\varphi \to \psi) \,\&\, (\psi \to \varphi)$$

Формулы φ, ψ равносильны ($\varphi \sim \psi$), если формула $\varphi \leftrightarrow \psi$ общезначима

Утверждение. **Для любых равносильных формул $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$, $\psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ ЛП, интерпретации $\mathcal{I}$ и набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно следующее:**

$$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$. Тогда:

$\models (\varphi \to \psi) \,\&\, (\psi \to \varphi)$ (по определению равносильности)

$\mathcal{I} \models ((\varphi \to \psi) \,\&\, (\psi \to \varphi))[\widetilde{d}^n]$ (по определению общезначимости)

$\mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)[\widetilde{d}^n]$ (по семантике «$\&$»)

$\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$ (по семантике «$\to$» и соотношению $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$)

($\Leftarrow$) Аналогично ▼

Равносильность формул

Утверждение. $\sim$ — отношение эквивалентности

Утверждение. Если формула φ общезначима, то любая равносильная ей формула ψ также общезначима

Утверждение. Если формула φ выполнима, то любая равносильная ей формула ψ также выполнима

$\boxed{\text{Доказательства опустим для экономии времени}}$

Основные равносильности

Законы булевой алгебры

Коммутативность & и $\vee$:

$$\varphi \,\&\, \psi \sim \psi \,\&\, \varphi \qquad\qquad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$$

Ассоциативность & и $\vee$:

$$(\varphi \,\&\, \psi) \,\&\, \chi \sim \varphi \,\&(\psi \,\&\, \chi) \qquad\qquad (\varphi \vee \psi) \vee \chi \sim \varphi \vee (\psi \vee \chi)$$

Дистрибутивность $\vee$ относительно & и & относительно $\vee$:

$$\varphi \,\&(\psi \vee \chi) \sim \varphi \,\&\, \psi \vee \varphi \,\&\, \chi \qquad\qquad \varphi \vee (\psi \,\&\, \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \,\&(\varphi \vee \chi)$$

Идемпотентность & и $\vee$:

$$\varphi \,\&\, \varphi \sim \varphi \qquad\qquad \varphi \vee \varphi \sim \varphi$$

Инволютивность $\neg$:

$$\neg\neg\varphi \sim \varphi$$

Законы де Моргана для & и для $\vee$:

$$\neg(\varphi \,\&\, \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi \qquad\qquad \neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \,\&\, \neg\psi$$

Закон удаления импликации:

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$$

... ...

Основные равносильности

Правила работы с кванторами

Переименование связанной переменной:

$$\forall \mathrm{x}\, \varphi \sim \forall \mathrm{y}\, (\varphi\{\mathrm{x}/y\}) \qquad \exists \mathrm{x}\, \varphi \sim \exists \mathrm{y}\, (\varphi\{\mathrm{x}/y\})$$

(*если* $\mathrm{y} \notin \mathsf{Var}_\varphi$ *и подстановка* $\{\mathrm{x}/y\}$ *правильна для* φ)

Продвижение отрицания под квантор:

$$\neg\forall \mathrm{x}\, \varphi \sim \exists \mathrm{x}\, \neg\varphi \qquad \neg\exists \mathrm{x}\, \varphi \sim \forall \mathrm{x}\, \neg\varphi$$

Вынесение квантора за скобки:

$$\forall \mathrm{x}\, \varphi \,\&\, \psi \sim \forall \mathrm{x}\, (\varphi \,\&\, \psi) \qquad \exists \mathrm{x}\, \varphi \,\&\, \psi \sim \exists \mathrm{x}\, (\varphi \,\&\, \psi)$$

$$\forall \mathrm{x}\, \varphi \vee \psi \sim \forall \mathrm{x}\, (\varphi \vee \psi) \qquad \exists \mathrm{x}\, \varphi \vee \psi \sim \exists \mathrm{x}\, (\varphi \vee \psi)$$

(*если* $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_\psi$)

Строго говоря, справедливость каждой упомянутой равносильности следует **обосновать**

Но эти обоснования устроены очень просто и однотипно, и потому здесь не приводятся: достаточно применить метод семантических таблиц

Теорема о равносильной замене

$\varphi[\![\psi]\!]$ — обозначение формулы φ, содержащей подформулу ψ

$\varphi[\![\psi/\chi]\!]$ — формула, получающаяся из φ заменой некоторого вхождения подформулы ψ на χ

Теорема (о равносильной замене в ЛП)

Для любых формул φ, ψ, χ логики предикатов верно:

$$\psi \sim \chi \quad \Rightarrow \quad \varphi[\![\psi]\!] \sim \varphi[\![\psi/\chi]\!]$$

Доказательство (индукцией по структуре формулы φ).

База индукции: $\varphi = \psi$ — очевидно $(\psi \sim \chi \Rightarrow \varphi = \psi \sim \chi)$

Индуктивный переход. Подробно разберём только один случай:

$$\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}) = \forall \mathrm{x}\ (\varphi'[\![\psi]\!])$$

Остальные случаи аналогичны

Теорема о равносильной замене

Доказательство (индуктивный переход).

Утверждение: $\forall \mathrm{x}\,(\varphi'[\![\psi]\!]) \sim \forall \mathrm{x}\,(\varphi'[\![\psi/\chi]\!])$

Индуктивное предположение: $\varphi'[\![\psi]\!] \sim \varphi'[\![\psi/\chi]\!]$, то есть для любой интерпретации $\mathcal{I}$ и любых предметов d, $\widetilde{d}^n$ верно:

$$\mathcal{I} \models (\varphi'[\![\psi]\!] \rightarrow \varphi'[\![\psi/\chi]\!])[\mathrm{x}/d, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models (\varphi'[\![\psi/\chi]\!] \rightarrow \varphi'[\![\psi]\!])[\mathrm{x}/d, \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Тогда

$$\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\,(\varphi'[\![\psi]\!] \rightarrow \varphi'[\![\psi/\chi]\!])[\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\,(\varphi'[\![\psi/\chi]\!] \rightarrow \varphi'[\![\psi]\!])[\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Из блока 10: $\models \forall \mathrm{x}\,(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall \mathrm{x}\, A \rightarrow \forall \mathrm{x}\, B)$, а значит:

$$\mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}\, \varphi'[\![\psi]\!] \rightarrow \forall \mathrm{x}\, \varphi'[\![\psi/\chi]\!])[\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}/\widetilde{d}^n]$$
$$\mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}\, \varphi'[\![\psi/\chi]\!] \rightarrow \forall \mathrm{x}\, \varphi'[\![\psi]\!])[\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}/\widetilde{d}^n]$$

Но это и есть $\forall \mathrm{x}\,(\varphi'[\![\psi]\!]) \sim \forall \mathrm{x}\,(\varphi'[\![\psi/\chi]\!])$ ▼

Пример напоследок

Используя равносильную замену, можно существенно изменить форму высказывания, сохранив его смысл — (не)выполнимость в каждой интерпретации на каждом наборе предметов

Например,

$\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$

$\sim \qquad (\exists x\, \varphi \sim \exists y\, (\varphi\{x/y\}))$

$\forall x\, P(x) \to \exists y\, P(y)$

$\sim \qquad (\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi)$

$\neg\forall x\, P(x) \vee \exists y\, P(y)$

$\sim \qquad (\neg\forall x\, \varphi \sim \exists x\, \neg\varphi)$

$\exists x\, \neg P(x) \vee \exists y\, P(y)$

$\sim \qquad (\exists x\, \varphi \vee \psi \sim \exists x\, (\varphi \vee \psi);\ \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi)$

$\exists x\, \exists y\, (\neg P(x) \vee P(y))$

$\sim \qquad (\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi)$

$\exists x\, \exists y\, (P(x) \to P(y))$