Математическая логика

mk.cs.msu.ru $\rightarrow$ Лекционные курсы $\rightarrow$ Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 9

Подстановки
(основные определения)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Вступление

($\models \varphi \quad \Leftrightarrow$ семантическая таблица $\langle \mid \varphi \rangle$ невыполнима)

Чтобы научиться проверять общезначимость формул,
достаточно придумать правила преобразования таблиц,
позволяющие извлекать «явные противоречия» (закрытые таблицы)
из таблиц, содержащих «неявные противоречия» (невыполнимых)

Для примера рассмотрим такую невыполнимую таблицу:

$$\langle \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{P}(\mathbf{c}) \rangle$$

Чтобы преобразовать эту таблицу в закрытую, достаточно заметить,
что если утверждение $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ выполняется для любого предмета x, то оно
выполняется, в частности, и для предмета, обозначенного константой $\mathbf{c}$

Значит, можно подставить на место x константу $\mathbf{c}$
и получить выполнимость утверждения $\mathrm{P}(\mathbf{c})$

Добавив это утверждение в левую часть, получим закрытую таблицу:

$$\langle \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathbf{c}) \mid \mathrm{P}(\mathbf{c}) \rangle$$

Чтобы строго сформулировать соответствующее правило,
следует строго определить, что такое «подставить»

Подстановки

Пусть заданы множество переменных Var и множество термов Term

Подстановка — это отображение $\theta : \mathrm{Var} \to \mathrm{Term}$

Область подстановки θ: $\mathrm{Dom}_\theta = \{\mathtt{x} \mid \mathtt{x} \in \mathrm{Var}, \theta(\mathtt{x}) \neq \mathtt{x}\}$

Подстановка конечна, если её область конечна

Subst — множество всех конечных подстановок

$\{\mathtt{x}_1/t_1, \dots, \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$ — это конечная подстановка θ, для которой верно:

- $\mathrm{Dom}_\theta = \{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$
- $\theta(\mathtt{x}_\mathtt{i}) = t_i, \qquad 1 \le i \le n$

Пара $\mathtt{x}_\mathtt{i}/t_i$ называется связкой

ε — это тождественная (пустая) подстановка: $\mathrm{Dom}_\varepsilon = \emptyset$

Подстановки

Пусть E — логическое выражение (терм или формула) логики предикатов и θ — подстановка

Результат $E\theta$ применения подстановки θ к E определяется так:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{x}\theta = \theta(\mathrm{x}) & (\mathrm{x} \in \mathsf{Var}) \\
\mathbf{c}\theta = \mathbf{c} & (\mathbf{c} \in \mathsf{Const}) \\
\mathbf{f}(t_1, \dots, t_n)\theta = \mathbf{f}(t_1\theta, \dots, t_n\theta) & (\mathbf{f} \in \mathsf{Func},\ t_1, \dots, t_n \in \mathsf{Term}) \\
\mathrm{P}(t_1, \dots, t_n)\theta = \mathrm{P}(t_1\theta, \dots, t_n\theta) & (\mathrm{P} \in \mathsf{Pred}) \\
(\varphi \,\&\, \psi)\theta = (\varphi\theta \,\&\, \psi\theta) & (\varphi, \psi \in \mathsf{Form}) \\
(\varphi \vee \psi)\theta = (\varphi\theta \vee \psi\theta) & \\
(\varphi \to \psi)\theta = (\varphi\theta \to \psi\theta) & \\
(\neg\varphi)\theta = (\neg\varphi\theta) & \\
(\forall \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\forall \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & (\theta'(\mathrm{x}) = \mathrm{x}; \\
(\exists \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\exists \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & \qquad \theta'(\mathrm{y}) = \theta(\mathrm{y}), \text{ если } \mathrm{y} \neq \mathrm{x})
\end{array}
$$

Иными словами, $E\theta$ получается из выражения E так:

- E — терм $\Rightarrow$ все вхождения переменных заменяются на их θ-образы
- E — формула $\Rightarrow$ все **свободные** вхождения переменных заменяются на их θ-образы

Подстановки

Пример применения подстановки к формуле

$\varphi = \forall x\ (P(x) \to \neg R(y)) \to R(\mathbf{f}(x)) \vee \exists y\ P(y) \vee R(u)$
$\theta = \{x/\mathbf{g}(x, \mathbf{c}), y/x, z/\mathbf{f}(z)\}$

Выделяются все свободные вхождения переменных в φ

$\forall x\ (P(x) \to \neg R(y)) \to R(\mathbf{f}(x)) \vee \exists y\ P(y) \vee R(u)$

Все выделенные вхождения заменяются согласно θ

$\varphi\theta = \forall x\ (P(x) \to \neg R(x)) \to R(\mathbf{f}(\mathbf{g}(x, \mathbf{c}))) \vee \exists y\ P(y) \vee R(u)$

Подстановки

При применении подстановок для выделения частных логических следствий следует соблюдать осторожность

Например:

$\varphi(x) = \forall x\ \exists y\ P(x, y) \to \exists y\ P(x, y)$

«если у каждого есть дед, то у x тоже есть дед»

Очевидно, что $\models \varphi(x)$

$\varphi(x)\{x/y\} = \forall x\ \exists y\ P(x, y) \to \exists y\ P(y, y)$

«если у каждого есть дед, то есть и тот, кто сам себе дед»

Очевидно, что $\not\models \varphi(x)\theta$

Почему смысл формулы после применения подстановки так исказился?

Подстановки

Переменная x свободна для терма t в формуле φ, если
ни одно свободное вхождение переменной x не лежит
в областях действия кванторов, связывающих переменные из Var_t

Подстановка $\theta = \{\mathrm{x_1}/t_1, \ldots, \mathrm{x_n}/t_n\}$ — правильная для формулы φ,
если для каждой связки $\mathrm{x_i}/t_i$
переменная $\mathrm{x_i}$ свободна для терма t_i в формуле φ

Например, для формулы $\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

- подстановка $\{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{u}, \mathrm{v})\}$ — правильная:
  все вхождения u и v в подставляемый терм свободны
- подстановка $\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}$ — неправильная:
  вхождение y в подставляемый терм оказывается связанным

Подстановки

Утверждение (о семантике правильной подстановки)

Для любых формулы $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}, \mathrm{x})$, интерпретации $\mathcal{I}$, набора предметов $\widetilde{d}^n$ и подстановки $\{\mathrm{x}/t(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})\}$, правильной для φ, верно:

$$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n, t[\widetilde{d}^n]] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi\{\mathrm{x}/t\}[\widetilde{d}^n]$$

Доказательство. $\boxed{\text{Можете попробовать сами}}$,
а здесь ограничимся небольшим **примером**

Пусть $\mathbf{1}, \mathbf{3} \in \mathrm{Const}$, $=^{(2)} \in \mathrm{Pred}$, $+^{(2)} \in \mathrm{Func}$
и все эти символы имеют «естественную» арифметическую оценку в $\mathcal{I}$:
$\overline{\mathbf{1}} = 1$, $\overline{\mathbf{3}} = 3$, $\overline{=}$ и $\overline{+}$ — отношение равенства и операция сложения чисел

Пусть $\varphi(\mathrm{y}, \mathrm{x}) = (\mathrm{x} = \mathbf{3})$, $t(\mathrm{y}) = (\mathbf{1} + \mathrm{y})$, и $d_1 = 2$

Тогда верно следующее:

- $t[d_1] = (\mathbf{1} + \mathrm{y})[\mathrm{y}/2] = 3$
- $\varphi\{\mathrm{x}/t\} = (\mathrm{x} = \mathbf{3})\{\mathrm{x}/\mathbf{1} + \mathrm{y}\} = (\mathbf{1} + \mathrm{y} = \mathbf{3})$
- $\mathcal{I} \models (\mathrm{x} = \mathbf{3})[\mathrm{y}/2, \mathrm{x}/3] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models (\mathbf{1} + \mathrm{y} = \mathbf{3})[\mathrm{y}/2]$