# Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 40

Определения и выразимость

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2021/2022, весенний семестр

# Вступление

Вспомним пример, с которого начиналось обсуждение аксиоматических теорий:

Утверждение. $1 + 1 = 2$
Определение. $2 = \mathsf{s}(1)$
Определение. $1 = \mathsf{s}(0)$
...

*Интуиция подсказывает*, что можно упростить доказательство утверждения, подставив в утверждение определения чисел 1 и 2 (заменив исходную формулу на «$\mathsf{s}(0) + \mathsf{s}(0) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$»)

Более того, кажется *интуитивно верным*, что любое натуральное число $N$ можно выразить через 0 и $\mathsf{s}$ и использовать соответствующее выражение вместо $N$ во всех рассуждениях

Попробуем **математически строго** сформулировать и обосновать понятия и утверждения, лежащие в основе этих интуитивных догадок («определение», его «подстановка», «выражение» чего-то через что-то)

# Явные определения и выразимость

Рассмотрим интерпретацию $\mathcal{I} = \langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \rangle$ сигнатуры $\sigma$

Будем говорить, что формулой $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$ в $\mathcal{I}$ реализуется такое $n$-местное отношение $P$: $$P(\widetilde{d}^n) = \mathbb{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$$

Определением отношения $P : D^n \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$ в $\mathcal{I}$ будем называть формулу $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$, реализующую $P$ в $\mathcal{I}$

Графиком функции $f : D^n \to D$ называется отношение местности $(n+1)$, содержащее те и только те наборы $(\widetilde{d}^n, d)$, для которых верно $f(\widetilde{d}^n) = d$

Определением функции $f : D^n \to D$ в $\mathcal{I}$ будем называть формулу $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}}, \mathtt{y})$, реализующую график $f$ в $\mathcal{I}$

Для технической простоты предмет будем считать функцией местности 0

Понятиями (интерпретации $\mathcal{I}$) будем называть функции и отношения, определённые над предметной областью $\mathcal{I}$

Понятие $\xi$ называется выразимым в интерпретации $\mathcal{I}$, если существует определение $\xi$ в $\mathcal{I}$

# Явные определения и выразимость

**Примеры** определений в интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \cdot, \mathbf{s}; =]$:

- Определение числа 2:
$$\mathrm{y} = \mathbf{s}(\mathbf{s}(0))$$
- Определения числа 0:
$$\mathrm{y} = 0$$
$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{y} + \mathrm{x} = \mathrm{x})$$
- Определение операции возведения в квадрат ($\_^2$):
$$\mathrm{y} = \mathrm{x}_1 \cdot \mathrm{x}_1$$
- Определение отношения нестрогого неравенства ($\geq$):
$$\exists \mathrm{z}\ (\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 + \mathrm{z})$$

Из существования определений чисел 2 и 0, операции $\_^2$ и отношения $\geq$ следует, что эти понятия **выразимы** в $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \cdot, \mathbf{s}; =]$

**Замечание.** определения такого вида повсеместно применяются в математике и имеют много названий: явные определения; сокращения; сокращающие определения; описательные определения; ...

# Подстановка явных определений

**Лемма (об определении отношения).** **Пусть**

- $A(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) = \mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k)$ — **атом,**
- $\psi(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{k})$ — **определение отношения** $\overline{\mathrm{P}}$ **в интерпретации** $\mathcal{I}$ **и**
- $\psi'$ — **формула, равносильная** $\psi$ **и такая что для неё правильна подстановка** $\theta = \{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$.

**Тогда для любого набора предметов** $\widetilde{d}^n$ **верно:**

$$\mathcal{I} \models A[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi'\theta[\widetilde{d}^n]$$

Доказательство.

$\mathcal{I} \models \mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k)[\widetilde{d}^n]$

$\Leftrightarrow$ (по свойствам семантики формул)

$\mathcal{I} \models \mathrm{P}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{k})[t_1[\widetilde{d}^n], \ldots, t_k[\widetilde{d}^n]]$

$\Leftrightarrow$ (по определению определения $\overline{\mathrm{P}}$ в $\mathcal{I}$)

$\mathcal{I} \models \psi[t_1[\widetilde{d}^n], \ldots, t_k[\widetilde{d}^n]]$

$\Leftrightarrow$ (по свойствам отношения равносильности)

$\mathcal{I} \models \psi'[t_1[\widetilde{d}^n], \ldots, t_k[\widetilde{d}^n]]$

$\Leftrightarrow$ (по правильности $\theta$ и свойствам семантики формул)

$\mathcal{I} \models \psi'\theta[\widetilde{d}^n]$ ▼

# Подстановка явных определений

**Лемма (об определении функции).** Пусть

- $A(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — атом, содержащий вхождение терма $\mathsf{f}(t_1, \ldots, t_k)$
- $A_{\mathtt{z}}$ — атом, получающийся из $A$ заменой обозначенного вхождения $\mathsf{f}(t_1, \ldots, t_k)$ на переменную $\mathtt{z}$, не содержащуюся в $A$
- $\psi(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{k}, \mathtt{y})$ — определение функции $\bar{\mathsf{f}}$ в интерпретации $\mathcal{I}$ и
- $\psi'$ — формула, равносильная $\psi$ и такая что для неё правильна подстановка $\theta = \{\mathtt{x}_1/t_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{k}/t_k, \mathtt{y}/\mathtt{z}\}$.

Тогда для любого набора предметов $\widetilde{d}^n$ верно

$$\mathcal{I} \models A[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \exists \mathtt{z}\, (\psi'\theta \,\&\, A_{\mathtt{z}})[\widetilde{d}^n]$$

Доказательство.

Аналогично доказательству предыдущей леммы, но технически сложнее, так что можете попробовать доказать самостоятельно

# Подстановка явных определений

Для сигнатуры $\sigma$ и символа $\mathrm{s}$, входящего в $\sigma$, записью $\sigma^{-\mathrm{s}}$ обозначим сигнатуру, получающуюся из $\sigma$ удалением символа $\mathrm{s}$

**Алгоритм подстановки определения**

*Вход:*

- Формула $\varphi$ сигнатуры $\sigma = \langle \mathsf{Const}, \mathsf{Func}, \mathsf{Pred} \rangle$
- Символ $\mathrm{s}$ сигнатуры $\sigma$
- Определение $\psi$ понятия $\bar{\mathrm{s}}$ (в некоторой интерпретации $\mathcal{I}$)

*Выход:* формула $\mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)$ сигнатуры $\sigma^{-\mathrm{s}}$

*Алгоритм:*

1. Рассмотреть формулу $\chi = \varphi$
2. Если в $\chi$ не входит символ $\mathrm{s}$, то $\mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi) = \chi$, а иначе:
   - 2.1 Выбрать вхождение атома $A$ в $\chi$, содержащее символ $\mathrm{s}$
   - 2.2 Заменить это вхождение на формулу из соответствующей леммы:
     - если $\mathrm{s} \in \mathsf{Pred}$, то на $\psi'\theta$ из леммы об определении отношения
     - иначе — на $\exists \mathsf{z}\, (\psi'\theta \,\&\, A_{\mathsf{z}})$ из леммы об определении функции
   - 2.3 Вернуться в начало шага 2

# Подстановка явных определений

## Примеры

*Подстановка определения отношения*

$\exists z\,(x_1 = x_2 + z)$ на место предикатного символа $\geq^{(2)}$:

$$\forall x\,((1 \geq x)\,\&(x \geq z))$$

$$\mapsto$$

$$\forall x\,(\exists z\,(1 = x + z)\,\&\,(x \geq z))$$

$$\mapsto$$

$$\forall x\,(\exists z\,(1 = x + z)\,\&\,\exists u\,(x = z + u))$$

*Подстановка определения функции*

$y = x_1 \cdot x_1$ на место функционального символа $\_^2$:

$$\exists x\,(x^2 = y^2)$$

$$\mapsto$$

$$\exists x\,(\exists z_1\,(z_1 = x \cdot x\,\&\,z_1 = y^2))$$

$$\mapsto$$

$$\exists x\,(\exists z_1\,(z_1 = x \cdot x\,\&\,\exists z_2\,(z_2 = y \cdot y\,\&\,z_1 = z_2)))$$

# Теорема о подстановке определения

**Пусть**

- $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ — **формула сигнатуры** $\sigma$**,**
- $\mathcal{I}$ — **интерпретация той же сигнатуры** $\sigma$**,**
- $\mathrm{s}$ — **символ сигнатуры** $\sigma$**,**
- $\psi$ — **определение понятия** $\bar{\mathrm{s}}$ **в** $\mathcal{I}$**,**

**Тогда для любого набора предметов** $\widetilde{d}^n$ **верно:**

$$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}^{-\mathrm{s}} \models \mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)[\widetilde{d}^n]$$

Здесь $\mathcal{I}^{-\mathrm{s}}$ — интерпретация, получающаяся из $\mathcal{I}$ удалением символа $\mathrm{s}$ и его оценки

# Теорема о подстановке определения

Доказательство. $(\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}^{-\mathrm{s}} \models \mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)[\widetilde{d}^n])$

Справедливость теоремы напрямую следует из двух фактов:

1. $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)[\widetilde{d}^n]$
2. $\mathcal{I} \models \mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}^{-s} \models \mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)[\widetilde{d}^n]$

Второй факт следует из того, что в $\mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)$ не содержится символ $\mathrm{s}$

Осталось обосновать первый факт

По леммам об определениях отношения и функции, $\mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)$ получается из $\varphi$ конечным числом замен подформул $\chi$ на $\chi'$ так, что:

$$\mathcal{I} \models \chi[\widetilde{d}^n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \chi'[\widetilde{d}^n]$$

Следовательно, достаточно показать, что доказываемое утверждение верно, если $\mathcal{SD}(\varphi, \mathrm{s}, \psi)$ получается из $\varphi$ одной такой заменой

Дальнейшее обоснование совпадает с доказательством теоремы о равносильной замене (блок 16) с рассмотрением заданной интерпретации $\mathcal{I}$ вместо произвольной ▼

# Подстановка явных определений

## Примеры

$$
\begin{aligned}
Ar[\mathbb{N}_0; 1; +; =, \geq] &\models \forall \mathtt{x}\, ((1 \geq \mathtt{x})\, \&(\mathtt{x} \geq \mathtt{z})) \\
&\Leftrightarrow \\
Ar[\mathbb{N}_0; 1; +; =] &\models \forall \mathtt{x}\, (\exists \mathtt{z}\, (1 = \mathtt{x} + \mathtt{z})\, \&\, \exists \mathtt{u}\, (\mathtt{x} = \mathtt{z} + \mathtt{u}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Ar[\mathbb{N}_0; ; ; =, \cdot, \_^2] &\models \exists \mathtt{x}\, (\mathtt{x}^2 = \mathtt{y}^2) \\
&\Leftrightarrow \\
Ar[\mathbb{N}_0; ; ; =, \cdot] &\models \exists \mathtt{x}\, (\exists \mathtt{z}_1\, (\mathtt{z}_1 = \mathtt{x} \cdot \mathtt{x}\, \&\, \exists \mathtt{z}_2\, (\mathtt{z}_2 = \mathtt{y} \cdot \mathtt{y}\, \&\, \mathtt{z}_1 = \mathtt{z}_2)))
\end{aligned}
$$

# Ещё несколько определений напоследок

В интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \cdot, \mathsf{s}; =]$ выразимы, в числе прочего:

- любое наперёд заданное натуральное число $N$:
$$\mathrm{y} = \underbrace{\mathsf{s}(\mathsf{s}(\ldots\mathsf{s}}_{N\ \text{раз}}(0)\ldots))$$
- свойство $\mathrm{div}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ «$\mathrm{x}_1$ является делителем $\mathrm{x}_2$»:
$$\exists \mathrm{z}\ (\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_1 \cdot \mathrm{z})$$
- операция вычисления наибольшего общего делителя:
$$\mathrm{div}(\mathrm{y}, \mathrm{x}_1)\ \&\ \mathrm{div}(\mathrm{y}, \mathrm{x}_2)\ \&\ \forall \mathrm{u}\ (\mathrm{div}(\mathrm{u}, \mathrm{x}_1)\ \&\ \mathrm{div}(\mathrm{u}, \mathrm{x}_2) \to \mathrm{div}(\mathrm{u}, \mathrm{y}))$$
- свойство $\mathrm{even}$ чётности чисел:
$$\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{x}_1 = \mathrm{y} \cdot 2)$$
- свойство $\mathrm{prime}$ простоты чисел:
$$\forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ ((\mathrm{x}_1 = \mathrm{y} \cdot \mathrm{z}) \to (\mathrm{y} = 1) \vee (\mathrm{z} = 1))$$
- свойство согласованности числá $\mathrm{x}$ с гипотезой Гольдбаха:
$$\mathrm{even}(\mathrm{x})\ \&(\mathrm{x} \geq 4) \to \exists \mathrm{y}\ \exists \mathrm{z}\ (\mathrm{prime}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{prime}(\mathrm{z})\ \&(\mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{z}))$$