Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 3

Логика предикатов:
синтаксис (термы, формулы),
семантика (интерпретации,
отношение выполнимости)

Выполнимые и общезначимые формулы

Модели

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2019, весенний семестр

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен (зачёт) он не сдаст

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен (зачёт) он не сдаст

логика высказываний:

$$\mathrm{Shirk} \to \neg \mathrm{Pass}$$

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

> **Если кто-то прогуливает лекции,**
> **то экзамен (зачёт) он не сдаст**

$$\forall x\ (\mathrm{Shirk}(x) \to \neg \mathrm{Pass}(x))$$

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен (зачёт) не сдаст его сосед

логика предикатов:

$$\forall x\ (\mathrm{Shirk}(x) \to \neg \mathrm{Pass}(\mathbf{neighbour}(x)))$$

Логика предикатов изучает законы причинно-следственной зависимости между утверждениями, основанными на **отношениях** между произвольными предметами

Формальный язык логики предикатов ориентирован на описание таких отношений

Немного о названии “логика предикатов”

Предикат (лат. praedicatum — сказанное, сказуемое):

понятие, определяющее предмет суждения (субъект)[1]

Кто-то	прогуливает	лекцию
(*субъект*)	(*предикат*)	(*объект*)

В более общем смысле:

- свойство, атрибут предмета, явления, события, ...
- отношение между явлениями, предметами, событиями, ...

[1] Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Немного о названии “логика предикатов”

классическая
логика
предикатов
первого порядка

Немного о названии “логика предикатов”

$$\parallel$$

логика
предикатов
первого порядка

Немного о названии “логика предикатов”

$|||$

логика
предикатов

Немного о названии “логика предикатов”

IV

логика

первого порядка

Немного о названии “логика предикатов”

Будем использовать такое название:

логика
предикатов

Алфавит

I. Базовые символы

Предметные переменные	$\mathsf{Var} = \{\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \ldots\}$
Предметные константы	— это **имена предметов**
Функциональные символы	обозначают **операции** над предметами
Предикатные символы	обозначают **отношения** между предметами

Алфавит

I. **Базовые символы**

Предметные переменные $\quad \mathrm{Var} = \{\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \dots\}$

Предметные константы $\quad \mathrm{Const} = \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \dots\}$

Функциональные символы $\quad \mathrm{Func} = \{\mathbf{f_1}^{(n_1)}, \mathbf{f_2}^{(n_2)}, \dots\}$

Предикатные символы $\quad \mathrm{Pred} = \{\mathrm{P_1}^{(m_1)}, \mathrm{P_2}^{(m_2)}, \dots\}$

n_i — **местность** функционального символа $\mathbf{f_i}$, $n_i \in \{1, 2, 3, \dots\}$
m_i — **местность** предикатного символа $\mathrm{P_i}$, $m_i \in \{1, 2, 3, \dots\}$

Иногда запись местности иногда будет опускаться:
например, $\mathbf{f}^{(k)}$ иногда будет записываться как $\mathbf{f}$

Тройка $\langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$ — сигнатура алфавита

Алфавит

I. **Базовые символы**

Предметные переменные	$\mathrm{Var} = \{\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \dots\}$
Предметные константы	$\mathrm{Const} = \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \dots\}$
Функциональные символы	$\mathrm{Func} = \{\mathbf{f_1}^{(n_1)}, \mathbf{f_2}^{(n_2)}, \dots\}$
Предикатные символы	$\mathrm{Pred} = \{\mathrm{P}_1^{(m_1)}, \mathrm{P}_2^{(m_2)}, \dots\}$

Примеры

констант:	$\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, π, $\mathbf{c}$, $\dots$
функциональных символов:	$+^{(2)}$, $\cdot^{(2)}$, $\mathbf{lim}^{(3)}$, $\dots$
предикатных символов:	$<^{(2)}$, $=^{(2)}$, $\dots$

Алфавит

II. Логические операции

(a) Логические связки

Конъюнкция	(логическое И)	$\&$
Дизъюнкция	(логическое ИЛИ)	$\vee$
Отрицание	(логическое НЕ)	$\neg$
Импликация	(логическое ЕСЛИ-ТО)	$\rightarrow$

(b) Кванторы

Квантор всеобщности	(“для каждого”)	$\forall$
Квантор существования	(“хотя бы один”)	$\exists$

III. Знаки препинания

Скобки	( )
Разделитель	,

Синтаксис: термы

БНФ, определяющая синтаксис термов:

$$t \ ::= \ \mathrm{x} \ | \ \mathbf{c} \ | \ \mathbf{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

где $t, t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы, $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}$, $\mathbf{c} \in \mathsf{Const}$ и $\mathbf{f}^{(n)} \in \mathsf{Func}$

Примеры термов: $(\mathrm{x}, \mathrm{z} \in \mathsf{Var};\ \mathbf{1} \in \mathsf{Const};\ +^{(2)}, \cdot^{(2)} \in \mathsf{Func})$

1. "Предмет, обозначенный переменной z":
$$\mathrm{z}$$
2. "Предмет, обозначенный константой $\mathbf{1}$":
$$\mathbf{1}$$
3. "Предмет, получающийся применением операции $+$ к *(1)* и *(2)*":
$$+(\mathbf{1}, \mathrm{z})$$
4. "Предмет, получающийся применением операции $\cdot$ к *(1)* и *(3)*":
$$\cdot(\mathrm{z}, +(\mathbf{1}, \mathrm{z}))$$
5. Более наглядная инфиксная форма записи терма *(4)*:
$$\mathrm{z} \cdot (\mathbf{1} + \mathrm{z})$$

Синтаксис: термы

Term — множество всех термов
(*над заданными множествами* Var, Const, Func)

Если t — терм, то:
Var$_t$ — множество всех переменных, входящих в терм t
$t(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n)$ — синоним t, если $\mathrm{Var}_t \subseteq \{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n\}$

Терм t — основной, если $\mathrm{Var}_t = \emptyset$

Пример: если $\mathbf{1}, \mathbf{3} \in$ Const и $+^{(2)}, \cdot^{(2)} \in$ Func, то терм

$$\mathbf{3} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{3})$$

является основным

Синтаксис: формулы

БНФ, определяющая синтаксис формул логики предикатов:

$$\begin{aligned}\varphi \ ::= \ & \mathrm{P}(t_1, t_2, \dots, t_n) \ \mid \\ & (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \\ & (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi),\end{aligned}$$

где φ — формула, $\mathrm{P}^{(n)} \in \mathsf{Pred}$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathsf{Term}$ и $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}$

Примеры формул: $(\mathrm{P}^{(2)}, \mathrm{R}^{(1)} \in \mathsf{Pred};\ \mathbf{f}^{(2)} \in \mathsf{Func};\ \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathsf{Var})$

1. "Предмет y и предмет, получающийся из предметов x и y применением операции $\mathbf{f}$, входят в отношение P":
$$\mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))$$
2. "Для любого предмета x верно *(1)*":
$$(\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$
3. "Если верно *(2)*, то предмет y удовлетворяет свойству R":
$$((\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to \mathrm{R}(\mathrm{y}))$$
4. "Хотя бы для одного предмета y верно *(3)*"
$$(\exists \mathrm{y}\ ((\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to \mathrm{R}(\mathrm{y})))$$

Синтаксис: формулы

Формула атомарна (является атомом), если имеет вид $\mathrm{P}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где $\mathrm{P}^{(n)} \in \mathsf{Pred}$ и $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathsf{Term}$

Неатомарные формулы также называются составными

Form — множество всех формул (*в алфавите с заданной сигнатурой*)

Приоритет логических операций (в порядке убывания):

$\forall$, $\exists$, $\neg$; затем $\&$; затем $\vee$; затем $\to$

Как работают приоритеты (пример)

Следующие формулы считаются синтаксически одинаковыми:

$$\forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{x})\ \&\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ (\neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$

$$\forall \mathrm{x}\ (\neg \mathrm{P}(\mathrm{x}))\ \&\ (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \exists \mathrm{x}\ ((\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$

$$(\forall \mathrm{x}\ (\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})))\ \&(\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y})))$$

$$((\forall \mathrm{x}\ (\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})))\ \&(\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y})))$$

$$(((\forall \mathrm{x}\ (\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})))\ \&(\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))))$$

Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора в формуле $\substack{\forall \\ \exists}\mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, — свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, — свободная переменная формулы

Var_φ — множество всех свободных переменных формулы φ

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора в формуле $\substack{\forall \\ \exists}\mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, — свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, — свободная переменная формулы

Var_φ — множество всех свободных переменных формулы φ

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Переменная y связана квантором $\exists$

Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора в формуле $\substack{\forall \\ \exists}\mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, — свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, — свободная переменная формулы

Var_φ — множество всех свободных переменных формулы φ

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Переменная x связана квантором $\forall$

Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора в формуле $\substack{\forall \\ \exists} \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, — свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, — свободная переменная формулы

Var_{φ} — множество всех свободных переменных формулы φ

Пример:

$$\exists \mathrm{y} \underbrace{(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))}_{\text{Область действия квантора } \exists}$$

Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора в формуле $\substack{\forall \\ \exists} x \ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, — свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, — свободная переменная формулы

Var_φ — множество всех свободных переменных формулы φ

Пример:

$$\exists y(\forall x \underbrace{\neg P(y, \mathbf{f}(x,y))}_{\text{Область действия квантора } \forall} \to R(x))$$

Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора в формуле $\overset{\forall}{\exists}\mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, — свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, — свободная переменная формулы

Var_φ — множество всех свободных переменных формулы φ

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Связанные вхождения переменной y

Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора в формуле $\substack{\forall \\ \exists}\mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, — свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, — свободная переменная формулы

Var_φ — множество всех свободных переменных формулы φ

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x}\boxed{\neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))} \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Связанное вхождение переменной x

Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора в формуле $\substack{\forall \\ \exists}\mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, — свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, — свободная переменная формулы

Var_φ — множество всех свободных переменных формулы φ

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Свободное вхождение переменной x

Синтаксис: формулы

$\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — сокращённая запись последовательности “$\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_\mathtt{n}$”

Если φ — формула, то:

- $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — синоним φ, если $\mathsf{Var}_\varphi \subseteq \{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$
- если $\mathsf{Var}_\varphi = \emptyset$, то φ — замкнутая формула, или предложение

CForm[1] — множество всех замкнутых формул (в заданном алфавите)

[1] Closed Formulae

Синтаксис: формулы

Содержательный пример

Требуется записать формулу

$\mathrm{lim}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) =$
“x — предел последовательности действительных чисел s”

в алфавите с такой сигнатурой:

- $\mathbf{0} \in$ Const
- $\mathbf{ad}^{(2)} \in$ Func: $\mathbf{ad}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) =$ “$|x - y|$”
- $\mathrm{R}^{(1)}, \mathrm{N}^{(1)}, \mathrm{S}^{(1)}, \mathrm{E}^{(3)}, <^{(2)} \in$ Pred:
  - $\mathrm{R}(\mathrm{x}) =$ “x — действительное число”
  - $\mathrm{N}(\mathrm{x}) =$ “x — натуральное число”
  - $\mathrm{S}(\mathrm{x}) =$ “x — последовательность действительных чисел”
  - $\mathrm{E}(\mathrm{x}, \mathrm{n}, \mathrm{s}) =$ “x — n-й член последоватлеьности s”
  - $\mathrm{x} < \mathrm{y}$ — сравнение чисел x и y

Синтаксис: формулы

Содержательный пример

Требуется записать формулу

$\lim(\mathtt{x}, \mathtt{s}) =$
“$\mathtt{x}$ — предел последовательности действительных чисел $\mathtt{s}$”

Ответ:

$$\mathrm{R}(\mathtt{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathtt{s}) \,\&\, \forall\varepsilon\; (\mathrm{R}(\varepsilon) \,\&(\mathbf{0}<\varepsilon) \to$$

$$\exists\mathtt{n}\; (\mathrm{N}(\mathtt{n}) \,\&\, \forall m\; (\mathrm{N}(\mathtt{m}) \,\&(\mathtt{n}<\mathtt{m}) \to$$

$$\forall\mathtt{y}\; (\mathrm{E}(\mathtt{y}, \mathtt{m}, \mathtt{s}) \to (\mathbf{ad}(\mathtt{x}, \mathtt{y})<\varepsilon)))))$$

Синтаксис: формулы

Содержательный пример

Требуется записать формулу

$\lim(\mathtt{x}, \mathtt{s}) =$
"$\mathtt{x}$ — предел последовательности действительных чисел $\mathtt{s}$"

Ответ:

$$\mathrm{R}(\mathtt{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathtt{s}) \,\&\, \forall \varepsilon\, (\mathrm{R}(\varepsilon) \,\&\, (\mathbf{0} < \varepsilon) \to$$
$$\exists \mathtt{n}\, (\mathrm{N}(\mathtt{n}) \,\&\, \forall m\, (\mathrm{N}(\mathtt{m}) \,\&\, (\mathtt{n} < \mathtt{m}) \to$$
$$\exists \mathtt{y}\, (\mathrm{E}(\mathtt{y}, \mathtt{m}, \mathtt{s}) \,\&\, (\mathbf{ad}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) < \varepsilon)))))$$

А так тоже верно?

Семантика: интерпретации

Как и в *логике высказываний*, смысл формуле логики предикатов придаёт интерпретация — "мир, в котором живёт формула"

Интерпретация состоит из

- предметов, населяющих мир
- операций[1] над предметами
- отношений[2], связывающих предметы

Таким образом, в основе интерпретаций логики предикатов лежат алгебраические системы[3]

[1] это смысл **функциональных символов**
[2] это смысл **предикатных символов**
[3] не следует пугаться этого термина;
это и есть совокупность "предметы + операции + отношения"

Семантика: интерпретации

Интерпретация (*сигнатуры* $\langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$) — это система $\left\langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \right\rangle$, где:

- D — непустое множество предметов (область интерпретации; предметная область; универсум)
- $\overline{\mathrm{Const}} : \mathrm{Const} \to \mathrm{D}$ — оценка констант
- $\overline{\mathrm{Func}} : \mathrm{Func} \to \cup_{n \geq 1}(\mathrm{D}^n \to \mathrm{D})$ — оценка функциональных символов
- $\overline{\mathrm{Pred}} : \mathrm{Pred} \to \cup_{n \geq 1}(\mathrm{D}^n \to \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\})$ — оценка предикатных символов

$\overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathrm{Const}}(\mathbf{c})$ — предмет, сопоставленный константе $\mathbf{c}$
$\overline{\mathbf{f}} = \overline{\mathrm{Func}}(\mathbf{f}) : \mathrm{D}^n \to \mathrm{D}$ — функция, сопоставленная символу $\mathbf{f}^{(n)}$
$\overline{\mathrm{P}} = \overline{\mathrm{Pred}}(\mathrm{P}) : \mathrm{D}^n \to \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ — предикат, сопоставленный символу $\mathrm{P}^{(n)}$

Семантика: интерпретации

Пример

Сигнатура: Const $= \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}\}$, Func $= \{\mathbf{f}^{(1)}\}$, Pred $= \{\mathrm{P}^{(1)}, \mathrm{R}^{(2)}\}$

Интерпретация:

предметная область: $\mathsf{D} = \{d_1, d_2, d_3\}$

оценка констант: $\overline{\mathbf{c_1}} = d_1$, $\overline{\mathbf{c_2}} = d_2$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\overline{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

Семантика термов

Значение $t(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})[\widetilde{d^n}]$ терма $t(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- термы-переменные:
$$\mathtt{x_i}[\widetilde{d^n}] = d_i$$
- термы-константы:
$$\mathbf{c}[\widetilde{d^n}] = \overline{\mathbf{c}}$$
- остальные термы:
$$\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k)[\widetilde{d^n}] = \overline{\mathbf{f}}(t_1[\widetilde{d^n}], \ldots, t_k[\widetilde{d^n}])$$

Семантика: отношение выполнимости ($\models$)

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$) определяется так:

- атомарная формула:
  $\mathcal{I} \models \mathrm{P}(t_1, \dots, t_k)[\widetilde{d^n}]$
  $\Leftrightarrow$
  $\overline{\mathrm{P}}(t_1[\widetilde{d^n}], \dots, t_k[\widetilde{d^n}]) = \mathbf{t}$
- отрицание:
  $\mathcal{I} \models (\neg\varphi)[\widetilde{d^n}]$
  $\Leftrightarrow$
  $\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d^n}]$

Семантика: отношение выполнимости ($\models$)

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$) определяется так:

- конъюнкция:
  $$\mathcal{I} \models (\varphi \,\&\, \psi)[\widetilde{d^n}]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d^n}]$ и $\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d^n}]$
- дизъюнкция:
  $$\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\widetilde{d^n}]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d^n}]$ или $\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d^n}]$
- импликация:
  $$\mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)[\widetilde{d^n}]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d^n}]$ или $\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d^n}]$

Семантика: отношение выполнимости ($\models$)

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})[\widetilde{d^n}]$) определяется так:

- квантор всеобщности:
  $\mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}_0\ \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}))[\widetilde{d^n}]$
  $\Leftrightarrow$
  для любого предмета d_0 из области интерпретации верно
  $\mathcal{I} \models \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})[d_0, \widetilde{d^n}]$
- квантор существования:
  $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{x}_0\ \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}))[\widetilde{d^n}]$
  $\Leftrightarrow$
  хотя бы для одного предмета d_0
  из области интерпретации верно
  $\mathcal{I} \models \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})[d_0, \widetilde{d^n}]$

$A[\mathrm{x}_1/d_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}/d_n]$ — синоним записи $A(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n})[d_1, \ldots, d_n]$

Семантика: примеры

Рассмотрим интерпретации такого вида:

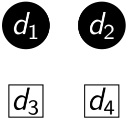
предметная область — квадраты и круги белого и чёрного цвета, расположенные на плоскости

сигнатура состоит из пяти предикатных символов, отвечающих следующим свойствам:

$C(x)$: “x — круг”
$S(x)$: “x — квадрат”
$B(x)$: “x — чёрный предмет”
$W(x)$: “x — белый предмет”
$U(x, y)$: “предмет x лежит под предметом y”

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{W}(\mathtt{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathtt{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathtt{x},\mathtt{y})))$$

Содержательно эта формула прочитывается так:

Для каждого предмета $\mathtt{x}$: если он является белым и является квадратом, то существует предмет $\mathtt{y}$, такой что он является чёрным, и он является кругом, и предмет $\mathtt{x}$ лежит под предметом $\mathtt{y}$

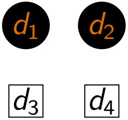
Проще говоря,

Каждый белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом

Чтобы строго убедиться, что это утверждение верно в $\mathcal{I}$, следует проверить соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

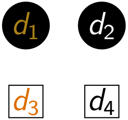
$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

1. $\mathrm{x} \leftarrow d_1$:
   - $\mathcal{I} \not\models \mathrm{W}(\mathrm{x})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}))[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))[d_1]$
2. $\mathrm{x} \leftarrow d_2$:
   - $\mathcal{I} \not\models \mathrm{W}(\mathrm{x})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}))[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))[d_2]$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{W}(\mathtt{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathtt{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathtt{x},\mathtt{y})))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место $\mathtt{x}$

3. $\mathtt{x} \leftarrow d_3$:
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{B}(\mathtt{y})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{C}(\mathtt{y})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{U}(\mathtt{x},\mathtt{y})[\mathtt{y}/d_1, \mathtt{x}/d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{B}(\mathtt{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathtt{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathtt{x},\mathtt{y}))[\mathtt{y}/d_1, \mathtt{x}/d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathtt{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathtt{x},\mathtt{y})))[d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathtt{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathtt{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathtt{x},\mathtt{y})))[d_3]$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

$$\begin{array}{cc} \textcircled{d_1} & \textcircled{d_2} \\ \boxed{d_3} & \boxed{d_4} \end{array}$$

и такую формулу φ:

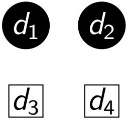
$$\forall x\ (W(x) \,\&\, S(x) \to \exists y\ (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y)))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

4. $x \leftarrow d_4$:
   - $\mathcal{I} \models B(y)[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models C(y)[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models U(x, y)[y/d_2, x/d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y))[y/d_2, x/d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\exists y\ (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y)))[d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (W(x) \,\&\, S(x) \to \exists y\ (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y)))[d_4]$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{C}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

Итого:

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{C}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_1]$$
$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{C}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_2]$$
$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{C}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_3]$$
$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{C}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_4]$$

А значит,

$$\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{C}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

сигнатура: Const $= \emptyset$, Func $= \{\mathbf{f}^{(1)}\}$, Pred $= \{\mathrm{P}^{(1)}, \mathrm{R}^{(2)}\}$

предметная область: D $= \{d_1, d_2, d_3\}$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

x	$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,(\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\&\,\neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))))$$

Проверим соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: примеры

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ \&\ \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

Семантика: примеры

$$\forall x\, (P(x) \to \exists y\, (R(x, y)\, \&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x, y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models R(x, y)[y/d_1, x/d_3]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x, y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models R(x,y)[y/d_1, x/d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x, y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$

Семантика: примеры

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ \&\ \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

x	$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models \mathrm{P}(\mathrm{x})[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ \&\ \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y})))[\mathrm{y}/d_1, \mathrm{x}/d_3]$

$\mathcal{I} \models \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))[d_2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[d_2]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[d_2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[d_2]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[d_2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_2, x/d_3]$

Семантика: примеры

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ \&\ \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$\mathcal{I} \models \mathrm{P}(\mathrm{x})[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ \&\ \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y})))[\mathrm{y}/d_1, \mathrm{x}/d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ \&\ \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y})))[\mathrm{y}/d_2, \mathrm{x}/d_3]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_2, x/d_3]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[d_3]$

Семантика: примеры

$$\forall x\, (P(x) \to \exists y\, (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_2, x/d_3]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[d_3]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\bar{R}(x, y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_2, x/d_3]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_3, x/d_3]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x, y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_2, x/d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_3, x/d_3]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\bar{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_2, x/d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_3, x/d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))[d_3]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

$\overline{R}(x, y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))[d_3]$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))[d_3]$

Семантика: примеры

$$\forall x\, (P(x) \to \exists y\, (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

$\bar{R}(x,y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\, (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (P(x) \to \exists y\, (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))[d_3]$

Значит,

$$\mathcal{I} \not\models \forall x\, (P(x) \to \exists y\, (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

Выполнимые и общезначимые формулы

Формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$ выполнима в интерпретации $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \mid\models \varphi$[1]), если **существует** набор предметов $\widetilde{d^n}$ из области интерпретации $\mathcal{I}$, такой что $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})[\widetilde{d^n}]$

Формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$ истинна в интерпретации $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \models \varphi$), если **для любого** набора предметов $\widetilde{d^n}$ из области интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})[\widetilde{d^n}]$

Формула φ выполнима ($\mid\models \varphi$[1]), если существует интерпретация, в которой она выполнима

Формула φ общезначима (тождественно истинна; $\models \varphi$), если она истинна в любой интерпретации

Формула φ противоречива (невыполнима, тождественно ложна), если она не является выполнимой

[1] Как и раньше, это необщеупотребимое обозначение

Выполнимые и общезначимые формулы

Пример

$$\begin{aligned}\varphi:&\quad \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x})\\ \psi:&\quad \exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x})\\ \chi:&\quad \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{x}\, \neg \mathrm{P}(\mathrm{x})\end{aligned}$$

Интерпретация $\mathcal{I}_1$: $\mathsf{D} = \{d\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d) = \mathbf{t}$

$$\mathcal{I}_1 \models \varphi \qquad \mathcal{I}_1 \models \psi \qquad \mathcal{I}_1 \not\models \chi$$

Интерпретация $\mathcal{I}_2$: $\mathsf{D} = \{d_1, d_2\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbf{t}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbf{f}$

$$\mathcal{I}_2 \models \varphi \qquad \mathcal{I}_2 \not\models \psi \qquad \mathcal{I}_2 \not\models \chi$$

Только что мы доказали, что

1. формулы φ, ψ выполнимы
2. формулы ψ, χ необщезначимы

А как доказать общезначимость φ и невыполнимость χ?

Модели

Пусть F — **множество предложений** (φ — **предложение**),
и $\mathcal{I}$ — **интерпретация**

Если каждая формула из F (формула φ) **истинна** в $\mathcal{I}$,
то $\mathcal{I}$ — модель для F (для φ)

Модель для множества F - это мир, устройство которого **адекватно** всем предложениям из F

Пища для размышлений

- Какие интерпретации являются моделью для пустого множества формул?
  - *Ответ:* **любые**. А почему?
- Существуют ли множества формул, не имеющие модели?
  - *Ответ:* **да**. А какие?

Модели

Пример

Снова рассмотрим интерпретации с квадратами и кругами белого и чёрного цвета на плоскости:

$\mathrm{C}(\mathrm{x})$: “x — круг”
$\mathrm{S}(\mathrm{x})$: “x — квадрат”
$\mathrm{B}(\mathrm{x})$: “x — чёрный предмет”
$\mathrm{W}(\mathrm{x})$: “x — белый предмет”
$\mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$: “предмет x лежит под предметом y”

Рассмотрим такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{C}(\mathrm{y}\ \&\ \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))))$$

“любой белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом”

и такие интерпретации:

$$\mathcal{I}_1: \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \square & \square \end{array} \qquad \mathcal{I}_2: \begin{array}{cc} \square & \bullet \\ & \square \end{array}$$

Тогда $\mathcal{I}_1$ **является моделью** для φ, а $\mathcal{I}_2$ **не является**