

Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:

valdus@yandex.ru

2018, весенний семестр

Лекция 3

Логика предикатов

Синтаксис: термы и формулы

Семантика: интерпретации,
отношение выполнимости

Выполнимые и общезначимые
формулы

Модели

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции, то экзамен он не сдаст

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции, то экзамен он не сдаст

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ:

$\text{Shirk} \rightarrow \neg \text{Pass}$

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции, то экзамен не сдаст его сосед

логика предикатов:

$$\forall x (\text{Shirk}(x) \rightarrow \neg \text{Pass}(\text{neighbour}(x)))$$

Логика предикатов изучает законы причинно-следственной зависимости между утверждениями, представленными в виде отношений

Формальный язык логики предикатов ориентирован на описание таких отношений

Немного о названии

Предикат¹ (лат. praedicatum — сказанное, сказуемое):

понятие, определяющее предмет суждения (субъект)

Кто-то прогуливает лекцию
(субъект) (предикат) (объект)

В более общем смысле:

- ▶ свойство, атрибут предмета, явления, события, ...
- ▶ отношение между явлениями, предметами, событиями, ...

¹ Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Немного о названии



классическая
логика
предикатов
первого порядка

Немного о названии



логика
предикатов
первого порядка

Немного о названии



логика
предикатов

Немного о названии

IV

логика

первого порядка

Немного о названии

Будем использовать такое название:

логика
предикатов

Алфавит

I. Базовые символы

Предметные переменные

$\text{Var} = \{x_1, x_2, \dots\}$

Предметные константы

— это **имена предметов**

Функциональные символы

обозначают **операции**

над предметами

Предикатные символы

обозначают **отношения**

между предметами

Алфавит

I. Базовые символы

Предметные переменные

$$\text{Var} = \{x_1, x_2, \dots\}$$

Предметные константы

$$\text{Const} = \{c_1, c_2, \dots\}$$

Функциональные символы

$$\text{Func} = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \dots\}$$

Предикатные символы

$$\text{Pred} = \{P_1^{(m_1)}, P_2^{(m_2)}, \dots\}$$

n_i — местность функционального символа f_i

m_i — местность предикатного символа P_i

запись местности будет опускаться

Тройка $\langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$ — сигнатура алфавита

Алфавит

I. Базовые символы

Предметные переменные

$$\text{Var} = \{x_1, x_2, \dots\}$$

Предметные константы

$$\text{Const} = \{c_1, c_2, \dots\}$$

Функциональные символы

$$\text{Func} = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \dots\}$$

Предикатные символы

$$\text{Pred} = \{P_1^{(m_1)}, P_2^{(m_2)}, \dots\}$$

Примеры

констант:

$$0, 1, \pi, c, \dots$$

функциональных символов:

$$+^{(2)}, \cdot^{(2)}, \mathbf{lim}^{(3)}, \dots$$

предикатных символов:

$$<^{(2)}, =^{(2)}, \dots$$

Алфавит

II. Логические связки

Конъюнкция	(логическое И)	$\&$
Дизъюнкция	(логическое ИЛИ)	\vee
Отрицание	(логическое НЕ)	\neg
Импликация	(логическое ЕСЛИ-ТО)	\rightarrow

III. Кванторы

Квантор всеобщности	(“для каждого”)	\forall
Квантор существования	(“хотя бы один”)	\exists

IV. Знаки препинания

Скобки	()
Разделитель	,

Синтаксис: термы

Терм — это:

x	$(x \in \text{Var})$
c	$(c \in \text{Const})$
$f(t_1, \dots, t_n)$	$(f^{(n)} \in \text{Func}; t_1, \dots, t_n \text{ — термы})$

Term — множество всех термов в заданном алфавите

Пусть t — терм. Тогда:

Var_t — множество всех переменных, входящих в терм t

$t(x_1, \dots, x_n)$ — синоним t , если $\text{Var}_t \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$

\tilde{x}^n — сокращение для “ x_1, \dots, x_n ”

Терм t — **основной**, если $\text{Var}_t = \emptyset$

Синтаксис: термы

Примеры термов

z ($z \in \text{Var}$)

3 ($3 \in \text{Const}$)

$\text{exp}(3, z)$ ($\text{exp}^{(2)} \in \text{Func}$)

$\cdot(x, +(1, \text{exp}(3, z)))$ ($\cdot^{(2)}, +^{(2)} \in \text{Func}$; $1 \in \text{Const}$; $x \in \text{Var}$)

$x \cdot (1 + 3^z)$ — инфиксная форма записи

$1 \cdot (1 + 3^1)$ — основной терм

Синтаксис: формулы

Формула — это:

$P(t_1, \dots, t_m)$ (атомарная формула
, или атом)

$(P^{(m)} \in \text{Pred},$
 $t_1, \dots, t_m \in \text{Term})$

$(\varphi \& \psi)$
 $(\varphi \vee \varphi)$
 $(\varphi \rightarrow \varphi)$
 $(\neg \varphi)$
 $(\forall x \varphi)$
 $(\exists x \varphi)$

} составная формула

$(\varphi, \psi$ — формулы,
 $x \in \text{Var})$

Form — множество всех формул в заданном алфавите

Синтаксис: формулы

Пояснение

$P(t_1, \dots, t_m)$ “предметы, описываемые термами t_1, \dots, t_m
находятся в отношении P ”

$(\varphi \& \psi)$ “ φ и ψ ”

$(\varphi \vee \psi)$ “ φ или ψ ”

$(\varphi \rightarrow \psi)$ “если φ , то ψ ”

$(\neg \varphi)$ “неверно, что φ ”

$(\forall x \varphi)$ “для любого предмета x верно φ ”

$(\exists x \varphi)$ “хотя бы для одного предмета x верно φ ”

Синтаксис: формулы

Примеры формул

$P(y, \mathbf{f}(x, y))$

$(P^{(2)} \in \text{Pred},$

$\mathbf{f}^{(2)} \in \text{Func}, x, y \in \text{Var})$

$(\neg P(y, \mathbf{f}(x, y)))$

$(\forall x \neg P(y, \mathbf{f}(x, y)))$

$((\forall x \neg P(y, \mathbf{f}(x, y))) \rightarrow R(x))$

$(R^{(1)} \in \text{Pred})$

$(\exists y ((\forall x \neg P(y, \mathbf{f}(x, y))) \rightarrow R(x)))$

Синтаксис: формулы

Приоритет логических операций (в порядке убывания)

\forall, \exists, \neg

$\&$

\vee

\rightarrow

Можно опускать скобки согласно приоритету

Пример

Следующие формулы считаются одинаковыми:

$$\forall x \neg P(x) \& \exists y R(x, y) \rightarrow \exists x (\neg P(x) \vee P(y))$$

$$\forall x (\neg P(x)) \& (\exists y R(x, y)) \rightarrow \exists x ((\neg P(x)) \vee P(y))$$

$$(\forall x (\neg P(x))) \& (\exists y R(x, y)) \rightarrow (\exists x ((\neg P(x)) \vee P(y)))$$

$$((\forall x (\neg P(x))) \& (\exists y R(x, y))) \rightarrow (\exists x ((\neg P(x)) \vee P(y)))$$

$$(((\forall x (\neg P(x))) \& (\exists y R(x, y))) \rightarrow (\exists x ((\neg P(x)) \vee P(y))))$$

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists y (\forall x \neg P(y, \mathbf{f}(x, y)) \rightarrow R(x))$$

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists y (\forall x \neg P(y, \mathbf{f}(x, y)) \rightarrow R(x))$$

Область действия квантора \exists

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$$



Переменная y связана квантором \exists

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$$



Связанные вхождения этой переменной

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$$

Область действия квантора \forall

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$$



Переменная x связана квантором \forall

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$$



Связанное вхождение этой переменной

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$$

Свободное вхождение переменной x



Синтаксис: формулы

Квантор **связывает** ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора в формуле $\forall x \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия связывающего её квантора — **связанное вхождение**

Вхождение переменной, не являющееся связанным, — **свободное вхождение**

Переменная, имеющая свободное вхождение, — **свободная переменная** формулы

Например, в рассмотренной формуле

$$\exists y (\forall x \neg P(y, f(x, y)) \rightarrow R(x))$$

свободной является только переменная x

Синтаксис: формулы

Формально, множество Var_φ свободных переменных формулы φ определяется так:

если $\varphi = P(t_1, \dots, t_m)$, то $\text{Var}_\varphi = \bigcup_{1 \leq i \leq m} \text{Var}_{t_i}$

если $\varphi = (\neg\psi)$, то $\text{Var}_\varphi = \text{Var}_\psi$

если $\varphi = (\psi \& \chi) / (\psi \vee \chi) / (\psi \rightarrow \chi)$, то $\text{Var}_\varphi = \text{Var}_\psi \cup \text{Var}_\chi$

если $\varphi = (\forall x \psi) / (\exists x \psi)$, то $\text{Var}_\varphi = \text{Var}_\psi \setminus \{x\}$

Пусть φ — формула. Тогда:

$\varphi(\tilde{x}^n)$ — синоним φ , если $\text{Var}_\varphi \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$

если $\text{Var}_\varphi = \emptyset$, то φ — **замкнутая формула**, или **предложение**

CForm^1 — множество всех замкнутых формул

в заданном алфавите

¹ Closed Formulae

Синтаксис: формулы

Содержательный пример

Требуется написать формулу

$\text{lim}(x, s) =$

“ x — предел последовательности действительных чисел s ”

в алфавите с такой сигнатурой:

$0 \in \text{Const}$

$\text{ad}^{(2)} \in \text{Func}$: $\text{ad}(x, y) = |x - y|$

$R^{(1)}, N^{(1)}, S^{(1)}, E^{(3)}, <^{(2)} \in \text{Pred}$:

$R(x) =$ “ x — действительное число”

$N(x) =$ “ x — натуральное число”

$S(x) =$ “ x — последовательность действительных чисел”

$E(x, n, s) =$ “ x — n -й член последовательности s ”

$x < y$ — сравнение чисел x и y

Синтаксис: формулы

Содержательный пример

Требуется написать формулу

$\lim(x, s) =$

“ x — предел последовательности действительных чисел s ”

Ответ:

$R(x) \ \& \ S(s) \ \& \ \forall \varepsilon \ (R(\varepsilon) \ \& \ (0 < \varepsilon) \rightarrow$

$\exists n \ (N(n) \ \& \ \forall m \ (N(m) \ \& \ (n < m) \rightarrow$

$\forall y \ (E(y, m, s) \rightarrow (\mathbf{ad}(x, y) < \varepsilon))))))$

Синтаксис: формулы

Содержательный пример

Требуется написать формулу

$\lim(x, s) =$

“ x — предел последовательности действительных чисел s ”

Ответ:

$R(x) \ \& \ S(s) \ \& \ \forall \varepsilon (R(\varepsilon) \ \& \ (0 < \varepsilon) \rightarrow$

$\exists n (N(n) \ \& \ \forall m (N(m) \ \& \ (n < m) \rightarrow$

$\exists y (E(y, m, s) \ \& \ (\mathbf{ad}(x, y) < \varepsilon))))))$

А так тоже верно?

Семантика: интерпретации

Аналогично **логике высказываний**, смысл формуле логики предикатов придаёт **интерпретация** — “мир, в котором живёт формула”

Интерпретация состоит из

- ▶ **предметов**, населяющих мир
- ▶ **операций**¹ над предметами
- ▶ **отношений**², связывающих предметы

Таким образом, в основе **интерпретаций** логики предикатов лежат **алгебраические системы**³

¹ это смысл **функциональных символов**

² это смысл **предикатных символов**

³ не следует пугаться этого термина; это и есть совокупность
“предметы + операции + отношения”

Семантика: интерпретации

Интерпретация (сигнатуры $\langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$) — это система $\langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle$, где:

- ▶ D — непустое множество **предметов**
(**область интерпретации**; предметная область; универсум)
- ▶ $\overline{\text{Const}} : \text{Const} \rightarrow D$ — **оценка констант**
- ▶ $\overline{\text{Func}} : \text{Func} \rightarrow \bigcup_{n \geq 1} (D^n \rightarrow D)$ — **оценка функциональных символов**
- ▶ $\overline{\text{Pred}} : \text{Pred} \rightarrow \bigcup_{n \geq 1} (D^n \rightarrow \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\})$ — **оценка предикатных символов**

$\overline{\mathbf{c}} = \overline{\text{Const}}(\mathbf{c})$ — **предмет**, сопоставленный константе \mathbf{c}

$\overline{\mathbf{f}} = \overline{\text{Func}}(\mathbf{f}) : D^n \rightarrow D$ — **функция**, сопоставленная символу $\mathbf{f}^{(n)}$

$\overline{\mathbf{P}} = \overline{\text{Pred}}(\mathbf{P}) : D^n \rightarrow \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ — **предикат**,

сопоставленный символу $\mathbf{P}^{(n)}$

Семантика: интерпретации

Пример

Сигнатура: $\text{Const} = \{c_1, c_2\}$, $\text{Func} = \{f^{(1)}\}$, $\text{Pred} = \{P^{(1)}, R^{(2)}\}$

Интерпретация:

предметная область: $D = \{d_1, d_2, d_3\}$

оценка констант: $\bar{c}_1 = d_1$, $\bar{c}_2 = d_2$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

$\bar{R}(x, y)$

x	y	d_1	d_2	d_3
d_1		t	t	f
d_2		t	f	t
d_3		f	t	t

Семантика: интерпретации

Значение термина

Пусть $t(\tilde{x}^n)$ — терм, и \mathcal{I} — интерпретация

Значение $t(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ термина t в интерпретации \mathcal{I} на наборе предметов d_1, \dots, d_n из области интерпретации определяется так:

- ▶ терм-переменная:

$$x_i[\tilde{d}^n] = d_i$$

- ▶ терм-константа:

$$c[\tilde{d}^n] = \bar{c}$$

- ▶ иначе:

$$\mathbf{f}(t_1, \dots, t_k)[\tilde{d}^n] = \bar{\mathbf{f}}(t_1[\tilde{d}^n], \dots, t_k[\tilde{d}^n])$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул \models

Пусть $\varphi(\tilde{x}^n)$ — формула, и \mathcal{I} — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ формулы φ в интерпретации \mathcal{I} на наборе предметов d_1, \dots, d_n из области интерпретации определяется так:

► атомарная формула:

$$\mathcal{I} \models P(t_1, \dots, t_k)[\tilde{d}^n]$$
$$\Leftrightarrow \bar{P}(t_1[\tilde{d}^n], \dots, t_k[\tilde{d}^n]) = \mathbf{t}$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул \models

Пусть $\varphi(\tilde{x}^n)$ — формула, и \mathcal{I} — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ формулы φ в интерпретации \mathcal{I} на наборе предметов d_1, \dots, d_n из области интерпретации определяется так:

► конъюнкция:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \& \psi)[\tilde{d}^n]$$

\Leftrightarrow

$$\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n]$$

И

$$\mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул \models

Пусть $\varphi(\tilde{x}^n)$ — формула, и \mathcal{I} — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ формулы φ в интерпретации \mathcal{I} на наборе предметов d_1, \dots, d_n из области интерпретации определяется так:

► дизъюнкция:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\tilde{d}^n]$$

\Leftrightarrow

$$\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n]$$

ИЛИ

$$\mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул \models

Пусть $\varphi(\tilde{x}^n)$ — формула, и \mathcal{I} — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ формулы φ в интерпретации \mathcal{I} на наборе предметов d_1, \dots, d_n из области интерпретации определяется так:

► отрицание:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \models (\neg\varphi)[\tilde{d}^n] \\ \Leftrightarrow \\ \mathcal{I} \not\models \varphi[\tilde{d}^n] \end{aligned}$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул \models

Пусть $\varphi(\tilde{x}^n)$ — формула, и \mathcal{I} — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ формулы φ в интерпретации \mathcal{I} на наборе предметов d_1, \dots, d_n из области интерпретации определяется так:

► импликация:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\tilde{d}^n]$$

\Leftrightarrow

$$\mathcal{I} \not\models \varphi[\tilde{d}^n]$$

ИЛИ

$$\mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул \models

Пусть $\varphi(\tilde{x}^n)$ — формула, и \mathcal{I} — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ формулы φ в интерпретации \mathcal{I} на наборе предметов d_1, \dots, d_n из области интерпретации определяется так:

- ▶ квантор всеобщности:

$$\mathcal{I} \models (\forall x_0 \varphi(x_0, \tilde{x}^n))[\tilde{d}^n]$$

\Leftrightarrow

для **любого** предмета d_0 из области интерпретации верно $\mathcal{I} \models \varphi(x_0, \tilde{x}^n)[d_0, \tilde{d}^n]$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул \models

Пусть $\varphi(\tilde{x}^n)$ — формула, и \mathcal{I} — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ формулы φ в интерпретации \mathcal{I} на наборе предметов d_1, \dots, d_n из области интерпретации определяется так:

- ▶ квантор существования:

$$\mathcal{I} \models (\exists x_0 \varphi(x_0, \tilde{x}^n))[\tilde{d}^n]$$

\Leftrightarrow

хотя бы для одного предмета d_0

из области интерпретации верно

$$\mathcal{I} \models \varphi(x_0, \tilde{x}^n)[d_0, \tilde{d}^n]$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул \models

Пусть $\varphi(\tilde{x}^n)$ — формула, и \mathcal{I} — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ формулы φ в интерпретации \mathcal{I} на наборе предметов d_1, \dots, d_n из области интерпретации определяется так:

$A[x_1/d_1, \dots, x_n/d_n]$ — синоним для $A(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$

Семантика: выполнимость

Пример

Рассмотрим интерпретации такого вида:

предметная область — квадраты и круги белого и чёрного цвета, расположенные на плоскости

сигнатура состоит из пяти предикатных символов, отвечающих следующим свойствам:

$C(x)$: “ x — круг”

$S(x)$: “ x — квадрат”

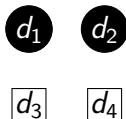
$B(x)$: “ x — чёрный предмет”

$W(x)$: “ x — белый предмет”

$U(x, y)$: “предмет x лежит под предметом y ”

Семантика: выполнимость

Рассмотрим такую интерпретацию \mathcal{I} :



и такую формулу φ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

Содержательно эта формула прочитывается так:

Для каждого предмета x : если он является белым и является квадратом, то существует предмет y , такой что он является чёрным, и он является кругом, и предмет x лежит под предметом y

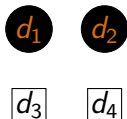
Проще говоря,

Каждый белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом

Чтобы строго убедиться, что это утверждение верно, следует проверить соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: выполнимость

Рассмотрим такую интерпретацию \mathcal{I} :



и такую формулу φ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

1. $x \leftarrow d_1$:

- ▶ $\mathcal{I} \not\models W(x)[d_1]$
- ▶ $\mathcal{I} \not\models (W(x) \& S(x))[d_1]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_1]$

2. $x \leftarrow d_2$:

- ▶ $\mathcal{I} \not\models W(x)[d_2]$
- ▶ $\mathcal{I} \not\models (W(x) \& S(x))[d_2]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_2]$

Семантика: выполнимость

Рассмотрим такую интерпретацию \mathcal{I} :

d_1 d_2

d_3 d_4

и такую формулу φ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

3. $x \leftarrow d_3$:

- ▶ $\mathcal{I} \models B(y)[d_1]$
- ▶ $\mathcal{I} \models C(y)[d_1]$
- ▶ $\mathcal{I} \models U(x, y)[y/d_1, x/d_3]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (B(y) \& C(y) \& U(x, y))[y/d_1, x/d_3]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (\exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_3]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_3]$

Семантика: выполнимость

Рассмотрим такую интерпретацию \mathcal{I} :

d_1 d_2

d_3 d_4

и такую формулу φ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

4. $x \leftarrow d_4$:

- ▶ $\mathcal{I} \models B(y)[d_2]$
- ▶ $\mathcal{I} \models C(y)[d_2]$
- ▶ $\mathcal{I} \models U(x, y)[y/d_2, x/d_4]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (B(y) \& C(y) \& U(x, y))[y/d_2, x/d_4]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (\exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_4]$
- ▶ $\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_4]$

Семантика: выполнимость

Рассмотрим такую интерпретацию \mathcal{I} :

d_1 d_2

d_3 d_4

и такую формулу φ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

Итого:

$$\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_1]$$

$$\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_2]$$

$$\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_3]$$

$$\mathcal{I} \models (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))[d_4]$$

А значит,

$$\mathcal{I} \models \forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

Семантика: выполнимость

Ещё один пример

Рассмотрим такую интерпретацию \mathcal{I} :

сигнатура: $\text{Const} = \emptyset$, $\text{Func} = \{\mathbf{f}^{(1)}\}$, $\text{Pred} = \{P^{(1)}, R^{(2)}\}$

предметная область: $D = \{d_1, d_2, d_3\}$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\bar{\mathbf{f}}(x)$		$\bar{P}(x)$		$\bar{R}(x, y)$				
x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$	x	$\bar{P}(x)$	x	y	d_1	d_2	d_3
d_1	d_2	d_1	t	d_1	d_1	t	t	f
d_2	d_3	d_2	f	d_2	d_1	t	f	t
d_3	d_1	d_3	t	d_3	d_1	f	t	t

и такую формулу φ :

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

Проверим соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models R(x, y)[y/d_1, x/d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models R(x, y)[y/d_1, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_1, x/d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_1, x/d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_1, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[d_2]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

 $\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[d_2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[d_2]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

 $\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[d_2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[d_2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_2, x/d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_1, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_2, x/d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_1, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_2, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_1, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_2, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\neg P(f(y)))[d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_1, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_2, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \models P(f(y))[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\neg P(f(y)))[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_3, x/d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_1, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_2, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_3, x/d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_1, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_2, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \& \neg P(f(y)))[y/d_3, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

 $\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y (R(x, y) \& \neg P(\mathbf{f}(y))))[d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

 $\bar{f}(x)$

x	$\bar{f}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

 $\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
d_1	t
d_2	f
d_3	t

 $\bar{R}(x, y)$

$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$	d_1	d_2	d_3
d_1	t	t	f
d_2	t	f	t
d_3	f	t	t

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))[d_3]$$

Значит,

$$\mathcal{I} \not\models \forall x (P(x) \rightarrow \exists y (R(x, y) \& \neg P(f(y))))$$

Выполнимые и общезначимые формулы

Формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ **выполнима** в интерпретации \mathcal{I} ($\mathcal{I} \models \varphi^1$), если существует набор предметов \tilde{d}^n из области интерпретации \mathcal{I} , такой что $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$

Формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ **истинна** в интерпретации \mathcal{I} , если для любого набора предметов \tilde{d}^n из области интерпретации \mathcal{I} верно $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$

Формула φ **выполнима** ($\models \varphi^1$), если существует интерпретация, в которой она выполнима

Формула φ **общезначима** (тождественно истинна; $\models \varphi$), если она истинна в любой интерпретации

Формула φ **противоречива** (невыполнима, тождественно ложна), если она не является выполнимой

¹ Как и раньше, это необщепотребимое обозначение

Выполнимые и общезначимые формулы

Пример

$$\varphi: \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$$

$$\psi: \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$$

$$\chi: \forall x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$$

Интерпретация \mathcal{I}_1 : $D = \{d\}$, $\bar{P}(d) = \mathbf{t}$

$$\mathcal{I}_1 \models \varphi$$

$$\mathcal{I}_1 \models \psi$$

$$\mathcal{I}_1 \not\models \chi$$

Интерпретация \mathcal{I}_2 : $D = \{d_1, d_2\}$, $\bar{P}(d_1) = \mathbf{t}$, $\bar{P}(d_2) = \mathbf{f}$

$$\mathcal{I}_2 \models \varphi$$

$$\mathcal{I}_2 \not\models \psi$$

$$\mathcal{I}_2 \not\models \chi$$

Только что мы доказали, что

1. формулы φ , ψ **выполнимы**
2. формулы ψ , χ **необщезначимы**

А как доказать общезначимость φ и невыполнимость χ ?

Модели

Пусть F — множество предложений (φ — предложение),
и \mathcal{I} — интерпретация

Если каждая формула из F (формула φ) выполнима в \mathcal{I} ,
то \mathcal{I} — модель для F (для φ)

Модель для множества F - это мир, устройство которого
адекватно всем предложениям из F

Пицца для размышлений

- ▶ Какие интерпретации являются моделью для пустого множества формул?
 - ▶ Ответ: любые. А почему?
- ▶ Существуют ли множества формул, не имеющие модели?
 - ▶ Ответ: да. А какие?

Модели

Пример

Снова рассмотрим интерпретации с квадратами и кругами белого и чёрного цвета на плоскости:

$C(x)$: “ x — круг”

$S(x)$: “ x — квадрат”

$B(x)$: “ x — чёрный предмет”

$W(x)$: “ x — белый предмет”

$U(x, y)$: “предмет x лежит под предметом y ”

Рассмотрим такую формулу φ :

$$\forall x (W(x) \& S(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& C(y) \& U(x, y)))$$

“любой белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом”

и такие интерпретации:



Тогда \mathcal{I}_1 является моделью для φ , а \mathcal{I}_2 не является