Математическая логика

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

e-mail:
valdus@yandex.ru

2017, весенний семестр

Лекция 3

Логика предикатов

Синтаксис: термы и формулы

Семантика: интерпретации, отношение выполнимости

Выполнимые и общезначимые формулы

Модели

Логическое следствие

Проблема общезначимости формул

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции, то экзамен он не сдаст

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции, то экзамен он не сдаст

логика высказываний:

$$\mathtt{Shirk} \to \neg \mathtt{Pass}$$

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции, то экзамен не сдаст его сосед

логика предикатов:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{Shirk}(\mathrm{x}) \rightarrow \neg \mathrm{Pass}(\mathbf{neighbour}(\mathrm{x})))$$

Логика предикатов изучает законы причинно-следственной зависимости между утверждениями, представленными в виде отношений

Формальный язык логики предикатов ориентирован на описание таких отношений

Немного о названии

Предикат[1] (лат. praedicatum — сказанное, сказуемое):

понятие, определяющее предмет суждения (субъект)

Кто-то	прогуливает	лекцию
(*субъект*)	(*предикат*)	(*объект*)

В более общем смысле:

- свойство, атрибут предмета, явления, события, ...
- отношение между явлениями, предметами, событиями, ...

[1] Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Немного о названии

классическая
логика
предикатов
первого порядка

Немного о названии

$$\parallel$$

логика
предикатов
первого порядка

Немного о названии

III

логика
предикатов

Немного о названии

IV

логика

первого порядка

Немного о названии

Будем использовать такое название:

логика
предикатов

Алфавит

I. Базовые символы

Предметные переменные	$\mathsf{Var} = \{\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \ldots\}$
Предметные константы	— это **имена предметов**
Функциональные символы	обозначают **операции** над предметами
Предикатные символы	обозначают **отношения** между предметами

Алфавит

I. Базовые символы

Предметные переменные	$\mathsf{Var} = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots\}$
Предметные константы	$\mathsf{Const} = \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \ldots\}$
Функциональные символы	$\mathsf{Func} = \{\mathbf{f_1}^{(n_1)}, \mathbf{f_2}^{(n_2)}, \ldots\}$
Предикатные символы	$\mathsf{Pred} = \{\mathrm{P}_1^{(m_1)}, \mathrm{P}_2^{(m_2)}, \ldots\}$

n_i — **местность** функционального символа $\mathbf{f_i}$

m_i — **местность** предикатного символа $\mathrm{P_i}$

запись местности будет опускаться

Тройка $\langle \mathsf{Const}, \mathsf{Func}, \mathsf{Pred} \rangle$ — сигнатура алфавита

Алфавит

I. Базовые символы

Предметные переменные $\mathsf{Var} = \{\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \dots\}$

Предметные константы $\mathsf{Const} = \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \dots\}$

Функциональные символы $\mathsf{Func} = \{\mathbf{f_1}^{(n_1)}, \mathbf{f_2}^{(n_2)}, \dots\}$

Предикатные символы $\mathsf{Pred} = \{\mathrm{P}_1{}^{(m_1)}, \mathrm{P}_2{}^{(m_2)}, \dots\}$

Примеры

констант: $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, π, $\mathbf{c}$, ...

функциональных символов: $+^{(2)}$, $\cdot^{(2)}$, $\mathbf{lim}^{(3)}$, ...

предикатных символов: $<^{(2)}$, $=^{(2)}$, ...

Алфавит

II. Логические связки

Конъюнкция	(логическое И)	&
Дизъюнкция	(логическое ИЛИ)	$\vee$
Отрицание	(логическое НЕ)	$\neg$
Импликация	(логическое ЕСЛИ-ТО)	$\to$

III. Кванторы

Квантор всеобщности	(“для каждого”)	$\forall$
Квантор существования	(“хотя бы один”)	$\exists$

IV. Знаки препинания

Скобки	( )
Разделитель	,

Синтаксис: термы

Терм — это:

$\mathtt{x}$	$(\mathtt{x} \in \mathsf{Var})$
$\mathbf{c}$	$(\mathbf{c} \in \mathsf{Const})$
$\mathbf{f}(t_1, \dots, t_n)$	$(\mathbf{f}^{(n)} \in \mathsf{Func};\ t_1, \dots t_n$ — термы$)$

Term — множество всех термов в заданном алфавите

Пусть t — терм. Тогда:

Var_t — множество всех переменных, входящих в терм t

$t(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n)$ — синоним t, если $\mathsf{Var}_t \subseteq \{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n\}$

$\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — сокращение для "$\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n$"

Терм t — основной, если $\mathsf{Var}_t = \emptyset$

Синтаксис: термы

Примеры термов

$\mathtt{z}$	$(\mathtt{z} \in \mathsf{Var})$
$\mathbf{3}$	$(\mathbf{3} \in \mathsf{Const})$
$\mathbf{exp}(\mathbf{3}, \mathtt{z})$	$(\mathbf{exp}^{(2)} \in \mathsf{Func})$
$\cdot(\mathtt{x}, +(\mathbf{1}, \mathbf{exp}(\mathbf{3}, \mathtt{z})))$	$(\cdot^{(2)}, +^{(2)} \in \mathsf{Func};\ \mathbf{1} \in \mathsf{Const};\ \mathtt{x} \in \mathsf{Var})$
$\mathtt{x}\cdot(\mathbf{1} + \mathbf{3}^{\mathtt{z}})$	— инфиксная форма записи
$\mathbf{1}\cdot(\mathbf{1} + \mathbf{3}^{\mathbf{1}})$	— основной терм

Синтаксис: формулы

Формула — это:

$\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_m)$ (атомарная формула, или атом) $(\mathrm{P}^{(m)} \in$ Pred, $t_1, \ldots, t_m \in$ Term$)$

$$\left.\begin{array}{l} (\varphi \mathbin{\&} \psi) \\ (\varphi \vee \varphi) \\ (\varphi \to \varphi) \\ (\neg\varphi) \\ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \\ (\exists \mathrm{x}\ \varphi) \end{array}\right\} \text{составная формула}$$

$(\varphi$, φ — формулы, $\mathrm{x} \in$ Var$)$

Form — множество всех формул в заданном алфавите

Синтаксис: формулы

Пояснение

$\mathrm{P}(t_1, \dots, t_m)$	“предметы, описываемые термами $t_1, \dots, t_m$ находятся в отношении P”
$(\varphi \& \psi)$	“φ и ψ”
$(\varphi \vee \psi)$	“φ или ψ”
$(\varphi \to \psi)$	“если φ, то ψ”
$(\neg \varphi)$	“неверно, что φ”
$(\forall \mathrm{x}\ \varphi)$	“для любого предмета x верно φ”
$(\exists \mathrm{x}\ \varphi)$	“хотя бы для одного предмета x верно φ”

Синтаксис: формулы

Примеры формул

$\mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))$ ($\mathrm{P}^{(2)} \in$ Pred,

$\mathbf{f}^{(2)} \in$ Func, $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in$ Var)

$(\neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$

$(\forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$

$((\forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$ ($\mathrm{R}^{(1)} \in$ Pred)

$(\exists \mathrm{y}\ ((\forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to \mathrm{R}(\mathrm{x})))$

Синтаксис: формулы

Приоритет логических операций (в порядке убывания)

$$\forall,\ \exists,\ \neg$$
$$\&$$
$$\vee$$
$$\rightarrow$$

Можно опускать скобки согласно приоритету

Пример

Следующие формулы считаются одинаковыми:

$$\forall x\ \neg P(x) \,\&\, \exists y\ R(x,y) \rightarrow \exists x\ (\neg P(x) \vee P(y))$$

$$\forall x\ (\neg P(x)) \,\&\, (\exists y\ R(x,y)) \rightarrow \exists x\ ((\neg P(x)) \vee P(y))$$

$$(\forall x\ (\neg P(x))) \,\&\, (\exists y\ R(x,y)) \rightarrow (\exists x\ ((\neg P(x)) \vee P(y)))$$

$$((\forall x\ (\neg P(x))) \,\&\, (\exists y\ R(x,y))) \rightarrow (\exists x\ ((\neg P(x)) \vee P(y)))$$

$$(((\forall x\ (\neg P(x))) \,\&\, (\exists y\ R(x,y))) \rightarrow (\exists x\ ((\neg P(x)) \vee P(y))))$$

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists \mathrm{y}\ (\forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists y \; \underbrace{(\forall x\, \neg P(y, \mathbf{f}(x, y)) \to R(x))}_{\text{Область действия квантора } \exists}$$

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists y \; \boxed{(\forall x \, \neg P(y, \mathbf{f}(x, y)) \to R(x))}$$

Переменная y связана квантором $\exists$

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists y \; \boxed{(\forall x \, \neg P(y, \mathbf{f}(x, y)) \to R(x))}$$

Связанные вхождения этой переменной

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists y\ (\forall x\ \underbrace{\neg P(y, \mathbf{f}(x, y))}_{\text{Область действия квантора } \forall} \rightarrow R(x))$$

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists \mathtt{y}\ (\forall \mathtt{x}\ \boxed{\neg \mathrm{P}(\mathtt{y}, \mathbf{f}(\mathtt{x}, \mathtt{y}))} \to \mathrm{R}(\mathtt{x}))$$

$\uparrow$

Переменная $\mathtt{x}$ связана квантором $\forall$

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists \mathtt{y}\ (\forall \mathtt{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathtt{y}, \mathbf{f}(\mathtt{x}, \mathtt{y})) \to \mathrm{R}(\mathtt{x}))$$

$\uparrow$

Связанное вхождение этой переменной

Синтаксис: формулы

Свободные и связанные переменные

$$\exists y\ (\forall x\ \neg P(y, \mathbf{f}(x, y)) \rightarrow R(x))$$

Свободное вхождение переменной x

Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора в формуле $\substack{\forall \\ \exists}\mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, — свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, — свободная переменная формулы

Например, в рассмотренной формуле

$$\exists \mathrm{y}\ (\forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

свободной является только переменная x

Синтаксис: формулы

Формально, множество Var_φ свободных переменных формулы φ определяется так:

$$
\begin{array}{ll}
\text{если } \varphi = \mathrm{P}(t_1, \ldots, t_m), & \text{то } \mathsf{Var}_\varphi = \bigcup\limits_{1 \le i \le m} \mathsf{Var}_{t_i} \\
\text{если } \varphi = (\neg\psi), & \text{то } \mathsf{Var}_\varphi = \mathsf{Var}_\psi \\
\text{если } \varphi = (\psi \,\&\, \chi)/(\psi \vee \chi)/(\psi \to \chi), & \text{то } \mathsf{Var}_\varphi = \mathsf{Var}_\psi \cup \mathsf{Var}_\chi \\
\text{если } \varphi = (\forall \mathtt{x}\ \psi)/(\exists \mathtt{x}\ \psi), & \text{то } \mathsf{Var}_\varphi = \mathsf{Var}_\psi \setminus \{\mathtt{x}\}
\end{array}
$$

Пусть φ — формула. Тогда:

$\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — синоним φ, если $\mathsf{Var}_\varphi \subseteq \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$

если $\mathsf{Var}_\varphi = \emptyset$, то φ — замкнутая формула, или предложение

CForm[1] — множество всех замкнутых формул в заданном алфавите

[1] Closed Formulae

Синтаксис: формулы

Содержательный пример

Требуется написать формулу

$\lim(\mathrm{x}, \mathrm{s}) =$
"x — предел последовательности действительных чисел s"

в алфавите с такой сигнатурой:

$\mathbf{0} \in$ Const
$\mathbf{ad}^{(2)} \in$ Func: $\mathbf{ad}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) =$ "$|x - y|$"
$\mathrm{R}^{(1)}, \mathrm{N}^{(1)}, \mathrm{S}^{(1)}, \mathrm{E}^{(3)}, <^{(2)} \in$ Pred:
$\mathrm{R}(\mathrm{x}) =$ "x — действительное число"
$\mathrm{N}(\mathrm{x}) =$ "x — натуральное число"
$\mathrm{S}(\mathrm{x}) =$ "x — последовательность действительных чисел"
$\mathrm{E}(\mathrm{x}, \mathrm{n}, \mathrm{s}) =$ "x — n-й член последоватлеьности s"
$\mathrm{x} < \mathrm{y}$ — сравнение чисел x и y

Синтаксис: формулы

Содержательный пример

Требуется написать формулу

$\lim(\mathtt{x}, \mathtt{s}) =$
“$\mathtt{x}$ — предел последовательности действительных чисел $\mathtt{s}$”

Ответ:

$$\mathrm{R}(\mathtt{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathtt{s}) \,\&\, \forall\varepsilon\ (\mathrm{R}(\varepsilon) \,\&\, (\mathbf{0} < \varepsilon) \to$$
$$\exists\mathtt{n}\ (\mathrm{N}(\mathtt{n}) \,\&\, \forall m\ (\mathrm{N}(\mathtt{m}) \,\&\, (\mathtt{n} < \mathtt{m}) \to$$
$$\forall\mathtt{y}\ (\mathrm{E}(\mathtt{y}, \mathtt{m}, \mathtt{s}) \to (\mathbf{ad}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) < \varepsilon)))))$$

Синтаксис: формулы

Содержательный пример

Требуется написать формулу

$\lim(\mathtt{x}, \mathtt{s}) =$
"x — предел последовательности действительных чисел s"

Ответ:

$$\mathrm{R}(\mathtt{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathtt{s})\,\&\,\forall\varepsilon\;(\mathrm{R}(\varepsilon)\,\&(\mathbf{0}<\varepsilon) \to$$

$$\exists\mathtt{n}\;(\mathrm{N}(\mathtt{n})\,\&\,\forall m\;(\mathrm{N}(\mathtt{m})\,\&(\mathtt{n}<\mathtt{m}) \to$$

$$\exists\mathtt{y}\;(\mathrm{E}(\mathtt{y},\mathtt{m},\mathtt{s})\&(\mathbf{ad}(\mathtt{x},\mathtt{y})<\varepsilon))))))$$

А так тоже верно?

Семантика: интерпретации

А как в логике предикатов выглядит интерпретация —
"мир, в котором живёт формула"?

Интерпретация состоит из

- предметов, населяющих мир
- операций[1] над предметами
- отношений[2], связывающих предметы

Таким образом, в основе интерпретаций логики предикатов лежат алгебраические системы[3]

---

[1] это смысл **функциональных символов**
[2] это смысл **предикатных символов**
[3] не следует пугаться этого термина; это и есть совокупность
"предметы + операции + отношения"

Семантика: интерпретации

Интерпретация (сигнатуры $\langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$) — это система $\langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \rangle$, где:

- D — непустое множество предметов (область интерпретации; предметная область; универсум)
- $\overline{\mathrm{Const}} : \mathrm{Const} \to \mathrm{D}$ — оценка констант
- $\overline{\mathrm{Func}} : \mathrm{Func} \to \cup_{n \geq 1}(\mathrm{D}^n \to \mathrm{D})$ — оценка функциональных символов
- $\overline{\mathrm{Pred}} : \mathrm{Pred} \to \cup_{n \geq 1}(\mathrm{D}^n \to \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\})$ — оценка предикатных символов

$\overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathrm{Const}}(\mathbf{c})$ — предмет, сопоставленный константе **c**

$\overline{\mathbf{f}} = \overline{\mathrm{Func}}(\mathbf{f}) : \mathrm{D}^n \to \mathrm{D}$ — функция, сопоставленная символу $\mathbf{f}^{(n)}$

$\overline{\mathrm{P}} = \overline{\mathrm{Pred}}(\mathrm{P}) : \mathrm{D}^n \to \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ — предикат, сопоставленный символу $\mathrm{P}^{(n)}$

Семантика: интерпретации

Пример

Сигнатура: Const $= \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}\}$, Func $= \{\mathbf{f}^{(1)}\}$, Pred $= \{\mathrm{P}^{(1)}, \mathrm{R}^{(2)}\}$

Интерпретация:

предметная область: $\mathsf{D} = \{d_1, d_2, d_3\}$

оценка констант: $\overline{\mathbf{c_1}} = d_1$, $\overline{\mathbf{c_2}} = d_2$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\overline{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

Семантика: интерпретации

Значение терма

Пусть $t(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ — терм, $\mathcal{I}$ — интерпретация

Значение $t(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$ терма t в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- терм-переменная:
$$\mathtt{x_i}[\widetilde{d^n}] = d_i$$
- терм-константа:
$$\mathbf{c}[\widetilde{d^n}] = \overline{\mathbf{c}}$$
- иначе:
$$\mathbf{f}(t_1, \dots, t_k)[\widetilde{d^n}] = \overline{\mathbf{f}}(t_1[\widetilde{d^n}], \dots, t_k[\widetilde{d^n}])$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул $\models$

Пусть $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$ — формула, $\mathcal{I}$ — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})[\widetilde{d^n}]$ формулы φ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- атомарная формула:

$$\mathcal{I} \models \mathrm{P}(t_1, \dots, t_k)[\widetilde{d^n}]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\overline{\mathrm{P}}(t_1[\widetilde{d^n}], \dots, t_k[\widetilde{d^n}]) = \mathbf{t}$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул $\models$

Пусть $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$ — формула, $\mathcal{I}$ — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})[\widetilde{d^n}]$ формулы φ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- конъюнкция:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \,\&\, \psi)[\widetilde{d^n}]$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d^n}]$$

И

$$\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d^n}]$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул $\models$

Пусть $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ — формула, $\mathcal{I}$ — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$ формулы φ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- дизъюнкция:

  $\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\widetilde{d^n}]$

  $\Leftrightarrow$

  $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d^n}]$

  ИЛИ

  $\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d^n}]$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул $\models$

Пусть $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — формула, $\mathcal{I}$ — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ формулы φ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- отрицание:

$$\mathcal{I} \models (\neg\varphi)[\widetilde{d}^n]$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d}^n]$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул $\models$

Пусть $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$ — формула, $\mathcal{I}$ — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})[\widetilde{d^n}]$ формулы φ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- импликация:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)[\widetilde{d^n}]$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d^n}]$$

ИЛИ

$$\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d^n}]$$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул $\models$

Пусть $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ — формула, $\mathcal{I}$ — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$ формулы φ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- квантор всеобщности:

  $$\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}_0\ \varphi(\mathtt{x}_0, \widetilde{\mathtt{x}^n}))[\widetilde{d^n}]$$

$\Leftrightarrow$

  для любого предмета d_0 из области интерпретации верно $\mathcal{I} \models \varphi(\mathtt{x}_0, \widetilde{\mathtt{x}^n})[d_0, \widetilde{d^n}]$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул $\models$

Пусть $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ — формула, $\mathcal{I}$ — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$ формулы φ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

- квантор существования:

  $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{x}_0\ \varphi(\mathtt{x}_0, \widetilde{\mathtt{x}^n}))[\widetilde{d^n}]$

  $\Leftrightarrow$

  хотя бы для одного предмета d_0 из области интерпретации верно

  $\mathcal{I} \models \varphi(\mathtt{x}_0, \widetilde{\mathtt{x}^n})[d_0, \widetilde{d^n}]$

Семантика: выполнимость

Отношение выполнимости формул $\models$

Пусть $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — формула, $\mathcal{I}$ — интерпретация

Отношение выполнимости $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ формулы φ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации определяется так:

$A[\mathtt{x}_1/d_1, \dots, \mathtt{x}_\mathtt{n}/d_n]$ — синоним для $A(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_\mathtt{n})[d_1, \dots, d_n]$

Семантика: выполнимость

Пример

Будем рассматривать интерпретации такого вида:

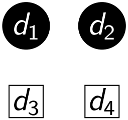
предметная область — квадраты и круги белого и чёрного цвета, расположенные на плоскости

сигнатура состоит из пяти предикатных символов, отвечающих следующим свойствам:

$C(x)$: “x — круг”
$S(x)$: “x — квадрат”
$B(x)$: “x — чёрный предмет”
$W(x)$: “x — белый предмет”
$U(x, y)$: “предмет x лежит под предметом y”

Семантика: выполнимость

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{W}(\mathtt{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathtt{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathtt{x},\mathtt{y})))$$

Как прочитывается эта формула?

Для каждого предмета $\mathtt{x}$: если он является белым и является квадратом, то существует предмет $\mathtt{y}$, такой что он является чёрным, и он является кругом, и предмет $\mathtt{x}$ лежит под предметом $\mathtt{y}$

Проще говоря,

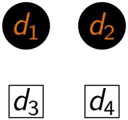
Каждый белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом

Как строго убедиться, что это утверждение верно?

Проверить соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: выполнимость

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{W}(\mathtt{x}) \mathbin{\&} \mathrm{S}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \mathbin{\&} \mathrm{C}(\mathtt{y}) \mathbin{\&} \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место $\mathtt{x}$

1. $\mathtt{x} \leftarrow d_1$:
   - $\mathcal{I} \not\models \mathrm{W}(\mathtt{x})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{W}(\mathtt{x}) \mathbin{\&} \mathrm{S}(\mathtt{x}))[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathtt{x}) \mathbin{\&} \mathrm{S}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \mathbin{\&} \mathrm{C}(\mathtt{y}) \mathbin{\&} \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})))[d_1]$
2. $\mathtt{x} \leftarrow d_2$:
   - $\mathcal{I} \not\models \mathrm{W}(\mathtt{x})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{W}(\mathtt{x}) \mathbin{\&} \mathrm{S}(\mathtt{x}))[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathtt{x}) \mathbin{\&} \mathrm{S}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \mathbin{\&} \mathrm{C}(\mathtt{y}) \mathbin{\&} \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})))[d_2]$

Семантика: выполнимость

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

$$\begin{array}{cc} d_1 & d_2 \\ \boxed{d_3} & \boxed{d_4} \end{array}$$

и такую формулу φ:

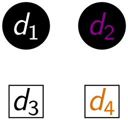
$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

3. $\mathrm{x} \leftarrow d_3$:
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{B}(\mathrm{y})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{C}(\mathrm{y})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})[\mathrm{y}/d_1, \mathrm{x}/d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))[\mathrm{y}/d_1, \mathrm{x}/d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_3]$

Семантика: выполнимость

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

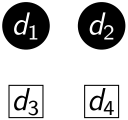
$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

4. $\mathrm{x} \leftarrow d_4$:
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{B}(\mathrm{y})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{C}(\mathrm{y})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})[\mathrm{y}/d_2, \mathrm{x}/d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))[\mathrm{y}/d_2, \mathrm{x}/d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_4]$

Семантика: выполнимость

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))$$

Итого:

$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))[d_1]$$
$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))[d_2]$$
$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))[d_3]$$
$$\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))[d_4]$$

А значит,

$$\mathcal{I} \models \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})))$$

Семантика: выполнимость

Ещё один пример

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

сигнатура: Const $= \emptyset$, Func $= \{\mathbf{f}^{(1)}\}$, Pred $= \{\mathrm{P}^{(1)}, \mathrm{R}^{(2)}\}$

предметная область: $\mathsf{D} = \{d_1, d_2, d_3\}$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

x	$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\ \&\ \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))))$$

Проверим соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: выполнимость

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x, y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x, y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

Семантика: выполнимость

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ \&\ \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

x	$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models \mathrm{P}(\mathrm{x})[d_3]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x\, (P(x) \to \exists y\, (R(x,y)\, \&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models R(x,y)[y/d_1, x/d_3]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models R(x,y)[y/d_1, x/d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x\, (P(x) \to \exists y\, (R(x, y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x, y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x, y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[d_2]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x\, (P(x) \to \exists y\, (R(x, y)\, \&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x, y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x, y)\, \&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[d_2]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[d_2]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[d_2]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[d_2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_2, x/d_3]$

Семантика: выполнимость

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ \&\ \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

x	$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models \mathrm{P}(\mathrm{x})[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ \&\ \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y})))[\mathrm{y}/d_1, \mathrm{x}/d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ \&\ \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y})))[\mathrm{y}/d_2, \mathrm{x}/d_3]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_2, x/d_3]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[d_3]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x\,(P(x) \rightarrow \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_2, x/d_3]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[d_3]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$
$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$$
$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_2, x/d_3]$$
$$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[d_3]$$
$$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[d_3]$$
$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_3, x/d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_2, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_3, x/d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_1, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_2, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/d_3, x/d_3]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))[d_3]$$

Семантика: выполнимость

$$\forall x\, (P(x) \to \exists y\, (R(x, y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x, y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\, (R(x, y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))[d_3]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))[d_3]$

$\mathcal{I} \not\models (P(x) \rightarrow \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))[d_3]$

Семантика: выполнимость

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
d_1	**t**
d_2	**f**
d_3	**t**

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**t**	**t**	**f**
d_2	**t**	**f**	**t**
d_3	**f**	**t**	**t**

$$\mathcal{I} \models P(x)[d_3]$$
$$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y))))[d_3]$$
$$\mathcal{I} \not\models (P(x) \to \exists y\ (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y))))[d_3]$$

Значит,

$$\mathcal{I} \not\models \forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

Выполнимые и общезначимые формулы

Формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ выполнима в интерпретации $\mathcal{I}$, если **существует** набор предметов $\widetilde{d^n}$ из области интерпретации $\mathcal{I}$, такой что $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$

Формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ истинна в интерпретации $\mathcal{I}$, если **для любого** набора предметов $\widetilde{d^n}$ из области интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$

Формула φ выполнима, если существует интерпретация, в которой она выполнима

Формула φ общезначима (или тождественно истинна), если она истинна в любой интерпретации

Формула φ противоречива (или невыполнима, или тождественно ложна), если она не является выполнимой

Выполнимые и общезначимые формулы

Пример

$$
\begin{aligned}
\varphi &: \quad \forall x P(x) \to \exists x\, P(x) \\
\psi &: \quad \exists x P(x) \to \forall x\, P(x) \\
\chi &: \quad \forall x P(x) \to \forall x\, \neg P(x)
\end{aligned}
$$

Интерпретация $\mathcal{I}_1$: $D = \{d\}$, $\overline{P}(d) = \mathbf{t}$

$$\mathcal{I}_1 \models \varphi \qquad \mathcal{I}_1 \models \psi \qquad \mathcal{I}_1 \not\models \chi$$

Интерпретация $\mathcal{I}_2$: $D = \{d_1, d_2\}$, $\overline{P}(d_1) = \mathbf{t}$, $\overline{P}(d_2) = \mathbf{f}$

$$\mathcal{I}_2 \models \varphi \qquad \mathcal{I}_2 \not\models \psi \qquad \mathcal{I}_2 \not\models \chi$$

Что мы только что доказали?

Формулы φ, ψ выполнимы; формулы ψ, χ необщезначимы

А как убедиться в общезначимости φ и невыполнимости χ?

И зачем вообще уделять внимание общезначимым и невыполнимым формулам?

Выполнимые и общезначимые формулы

Выполнимые необщезначимые формулы — это логические формы, которые служат для представления знаний, несущих в себе “нетривиальную” (“полезную”) информацию

Общезначимые формулы — это банальности, тавтологии, знания, не несущие в себе никакой “полезной” информации

При этом общезначимые формулы в логике считаются чрезвычайно важными

Почему?

Этот вопрос (*в некоторой степени*) разъяснится дальше[1]

---

[1] в теореме о логическом следствии

Модели

Пусть F — **множество предложений** (φ — **предложение**),
и $\mathcal{I}$ — **интерпретация**

Если каждая формула из F (формула φ) **выполнима** в $\mathcal{I}$,
то $\mathcal{I}$ — модель для F (для φ)

Как можно понимать модель?

Это мир, устройство которого **адекватно** всем предложениям из F

Пища для размышлений

- Какие интерпретации являются моделью для пустого множества формул?
  - Ответ: **любые**. А почему?
- Существуют ли множества формул, не имеющие модели?
  - Ответ: **да**. А какие?

Модели

Пример

Снова рассмотрим интерпретации с квадратами и кругами белого и чёрного цвета на плоскости:

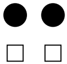
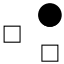
$\mathrm{C}(\mathrm{x})$: “x — круг”
$\mathrm{S}(\mathrm{x})$: “x — квадрат”
$\mathrm{B}(\mathrm{x})$: “x — чёрный предмет”
$\mathrm{W}(\mathrm{x})$: “x — белый предмет”
$\mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$: “предмет x лежит под предметом y”

Рассмотрим такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y} \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))))$$

“любой белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом”

и такие интерпретации:

$\mathcal{I}_1$:  $\mathcal{I}_2$: 

Тогда $\mathcal{I}_1$ **является моделью** для φ, а $\mathcal{I}_2$ **не является**

Логическое следствие

Пусть F — **множество предложений**, и φ — **предложение**

Тогда формула φ — логическое следствие множества F, если любая модель для множества F является моделью для φ, то есть если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно:

$$\mathcal{I} \models \mathsf{F} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{I} \models \varphi$$

Как можно понимать логическое следствие φ множества F?

Если F — имеющиеся у нас "базовые" знания, то φ — необходимо следующее из них "производное" знание

Одна из главных задач (и характерное проявление) интеллектуальной деятельности — это **извлечение логических следствий** из имеющихся баз знаний

Эта задача возникает в огромном числе областей "разумной деятельности": экспертные системы, (автоматическое и ручное) доказательство теорем, формальный анализ программ, ..., ...

Логическое следствие

Пусть F — **множество предложений**, и φ — **предложение**

Запись $F \models \varphi$ используется для обозначения того, что φ — **логическое следствие** множества F

А какие формулы являются логическими следствиями пустого множества формул?

Общезначимые, и поэтому общезначимость формулы φ обозначается так:

$$\models \varphi$$

А как выглядят логические следствия непустых множеств предложений?

Логическое следствие

Пример

Покажем, что представляют собой логические следствия, на простом, но показательном примере

Известно, что:

- Даша любит Сашу,
- а Саша любит пиво,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он

Любит ли кто-нибудь Дашу?

Попробуем переформулировать эту задачу на языке логики предикатов
Начнём с сигнатуры алфавита; в неё войдут:

- константы **Даша**, **Саша**, **Паша**, **пиво**
- предикатный символ $\mathrm{L}^{(2)}$: $\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ = “икс любит игрека”

Логическое следствие

Пример

Условия задачи переписываются так:

- Даша любит Сашу: $\varphi_1 : \mathrm{L}(\textbf{Даша}, \textbf{Саша})$
- Саша любит пиво: $\varphi_2 : \mathrm{L}(\textbf{Саша}, \textbf{пиво})$
- Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он:

$$\varphi_3 : \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \textbf{пиво})$$

$$\varphi_4 : \forall \mathrm{x}\ (\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{y})\, \&\, \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{x}))$$

- Любит ли кто-нибудь дашу?: $\varphi_0 : \exists x\ L(\mathrm{x}, \textbf{Даша})$

Сама задача тогда записывается так:

проверить соотношение $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_0$

И как же это проверить?
И причём здесь общезначимость формул?

Логическое следствие

Теорема о логическом следствии

Пусть $\mathsf{F} = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ **— конечное множество предложений, и** φ **— предложение. Тогда**

$$\mathsf{F} \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Доказательство. ($\Rightarrow$):

Рассмотрим **произвольную** интерпретацию $\mathcal{I}$

Если $\mathcal{I} \not\models \mathsf{F}$, то $\mathcal{I} \not\models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n$, а значит,

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Пусть теперь $\mathcal{I} \models \mathsf{F}$

Так как $\mathsf{F} \models \varphi$, имеем: $\mathcal{I} \models \varphi$ — а значит, снова верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Итого, для **произвольной** интерпретации $\mathcal{I}$ верно:

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Но это и означает общезначимость формулы $\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Логическое следствие

Теорема о логическом следствии

Пусть $\mathsf{F} = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ **— конечное множество предложений, и** φ **— предложение. Тогда**

$$\mathsf{F} \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Доказательство. ($\Leftarrow$):

Рассмотрим **произвольную** модель $\mathcal{I}$ для множества F:

$$\mathcal{I} \models \psi_1, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{I} \models \psi_n$$

Тогда $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n$

По рассматриваемому случаю формула $\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$ общезначима, а значит, $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Это возможно только в том случае, если верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Таким образом, **произвольная** модель $\mathcal{I}$ для множества F является моделью для φ ▼

Проблема общезначимости формул

Что же представляют собой общезначимые формулы?

Это способы преобразования знаний из одной формы в другую, учитывающие причинно-следственные связи, которые можно описать с помощью логики предикатов

Чтобы уметь извлекать новые знания (φ) из имеющихся ($\mathsf{F} = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$), нужно понимать, как устроены эти способы пребразования знаний

Более строго, проверка логического следствия $\mathsf{F} \models \varphi$ **сводится** к проверке общезначимости формулы:

$$\models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Это и означает важность проблемы общезначимости формул:

для заданной формулы φ
проверить её общезначимость:
$\models \varphi$ **?**

Конец лекции 3