

# *Курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» для бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 «Прикладная математика и информатика» профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений»*

## **1. Общая информация (учебная нагрузка, формы контроля и др.)**

Курс является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 «Прикладная математика и информатика» профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений».

Для бакалавров 4 курса профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений» (411–419 группы) курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» читается в 7 семестре в объёме 3 часов лекций и 2 часов семинарских занятий в неделю. Курс завершается экзаменом, на который выносятся как теоретические вопросы, изложенные на лекциях, так и задачи, рассмотренные на семинарских занятиях.

В разделах 2–6, 9 данного описания приводится подробная информация о содержании курса, программе и планах его изучения в 2020–2021 уч. году, методических материалах, а в разделах 7 и 8 — об особенностях организации учебного процесса, формах и сроках проведения контрольных мероприятий.

В соответствии с этими планами в течение семестра проводятся 3 основные (по 2 часа) контрольные работы и, возможно, несколько промежуточных (до 1 часа). По результатам контрольных с учётом посещаемости студентов, их работы на лекциях и семинарах выставляется предварительная оценка, которая играет существенную роль при формировании окончательной оценки на экзамене (см. раздел 8).

Чтение курса обеспечивается кафедрой математической кибернетики, лекторы 2021–2022 учебного года — профессор Селезнева Светлана Николаевна (selezn@cs.msu.ru), профессор Ложкин Сергей Андреевич (lozhkin@cs.msu.ru), Савицкий Игорь Владимирович (savvvig@gmail.com).

## **2. Аннотация**

Курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» (ранее «Дополнительные главы дискретной математики») является продолжением курсов «Дискретная математика» и «Основы кибернетики» и посвящён рассмотрению классических вычислительных моделей в теории алгоритмов, связанных с распознаванием множеств и вычислением функций, элементам теории сложности алгоритмов и теории дискретных управляющих систем.

В курсе изучаются модели конечных автоматов (распознавателей и преобразователей) и машин Тьюринга, рассматривается техника преобразований этих устройств и вычислений на этих устройствах. Для каждого из устройств приводится эквивалентный алгебраический формализм: правоинвариантные отношения эквивалентности, регулярные выражения, функциональная система с операциями суперпозиции и введения обратной связи над автоматными функциями, формализм Клини для класса частично-рекурсивных функций. Для каждого из случаев доказывается эквивалентность алгебраического и автоматного (машинного) подходов к определению класса множеств или функций. Рассматриваются сложностные классы  $P$  и  $NP$ , вводится понятие  $NP$ -полноты, доказывается полиномиальная разрешимость и устанавливается  $NP$ -полнота ряда задач.

Излагаются методы синтеза схем для функций алгебры логики (ФАЛ) из специальных классов и для не всюду определённых ФАЛ, устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из этих классов. Изучается сложность некоторых «индивидуальных» ФАЛ. Исследуется связь между схемной и алгоритмической сложностью ФАЛ.

### 3. Программа

#### I. Конечные автоматы

Конечные автоматы-распознаватели и конечно-автоматные множества слов, задание автоматов диаграммами Мура и каноническими уравнениями. Правоинвариантное отношение эквивалентности, его связь с конечно-автоматными множествами. Замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно теоретико-множественных операций. Недетерминированные автоматы, процедура детерминизации. Операции произведения и итерации, замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно операций произведения и итерации. Регулярные выражения и регулярные множества, совпадение классов регулярных и конечно-автоматных множеств.

Детерминированные функции, их определение с помощью бесконечных деревьев, вес дерева. Конечные автоматы-преобразователи, их задание диаграммами Мура и каноническими уравнениями. Замкнутость класса конечно-автоматных функций относительно операции суперпозиции. Зависимость с запаздыванием, операция введения обратной связи, замкнутость класса конечно-автоматных функций относительно операции введения обратной связи. Схемы из автоматных элементов, реализация конечно-автоматных функций схемами из автоматных элементов. Существование конечных полных систем в классе конечно-автоматных функций.

#### II. Машины Тьюринга и вычислимые функции

Машины Тьюринга, функции, вычислимые на машинах Тьюринга. Операции композиции и итерации над машинами Тьюринга. Моделирование машин Тьюринга. Существование универсальной машины Тьюринга.

Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации над частичными функциями. Замкнутость класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга, относительно операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Примитивно-рекурсивные функции, примитивная рекурсивность простейших арифметических функций. Частично-рекурсивные функции, примеры не всюду определенных частично-рекурсивных функций. Совпадение класса частично-рекурсивных функций с классом функций, вычислимых на машинах Тьюринга, теорема Клини.

Сложностные классы P и NP. Полиномиальная сводимость, NP-полнота. NP-полнота задачи выполнимости КНФ и задачи выполнимости 3-КНФ. Полиномиальная разрешимость задачи выполнимости 2-КНФ.

#### III. Сложность структурной реализации функций алгебры логики из некоторых классов

Задача синтеза схем для функций алгебры логики (ФАЛ) из специальных классов. Мощностная классификация специальных классов ФАЛ и нижние мощностные оценки связанных с ними функций Шеннона. Инвариантные и квазиинвариантные классы ФАЛ, их метрические свойства и структурное описание.

Асимптотически оптимальные методы синтеза схем для (ненулевых) квазиинвариантных классов. Синтез схем для ФАЛ из специальных классов на основе их «погружения» в квазиинвариантные классы и на основе принципа локального кодирования О. Б. Лупанова.

Задача синтеза схем для неоднозначно заданных ФАЛ и, в частности, для не всюду определённых ФАЛ. Асимптотически оптимальные методы синтеза схем для не всюду определённых ФАЛ.

Задача синтеза схем для «индивидуальных» ФАЛ и проблема получения нижних оценок их сложности. Теорема Храпченко о сложности реализации ФАЛ в классе  $\pi$ -схем. Схемная и алгоритмическая сложность функций, гипотеза С. В. Яблонского и теорема Дж. Сэвиджа.

#### 4. Предварительный список вопросов к экзамену по курсу «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» (осенний семестр 2020–2021 уч. года; 411–419 группы)

##### I. Конечные автоматы

1. Конечный автомат-распознаватель, конечно-автоматное множество. [1, с. 27–28]
2. Правоинвариантное отношение эквивалентности, связь с конечно-автоматными множествами. [1, с. 29–31]
3. Замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно теоретико-множественных операций. [1, с. 32–33]
4. Недетерминированные автоматы, процедура детерминизации. [1, с. 34–36]
5. Операции произведение и итерации. Замкнутость конечно-автоматных множеств относительно операций произведения и итерации. [1, с. 37–39]
6. Регулярные выражения и регулярные множества. [1, с. 40]
7. Теорема Клини. [1, с. 40–42]
8. Детерминированные функции. Задание детерминированных функций деревьями. Вес дерева. [2, с. 74–85]
9. Канонические уравнения, векторная и скалярная формы канонических уравнений. [2, с. 88–91]
10. Замкнутость класса конечно-автоматных функций относительно операции суперпозиции. [2, с. 92–94], [1, с. 57–59]
11. Зависимость с запаздыванием. Операция введения обратной связи. [2, с. 94–96, 98–102]
12. Существование конечных полных систем в классе конечно-автоматных функций. [2, с. 105–108], [1, с. 60–61]

##### II. Машины Тьюринга и вычислимые функции

13. Машины Тьюринга. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга. [1, с. 65–68]
14. Операции композиции и итерации над машинами Тьюринга. [1, с. 70–72]
15. Моделирование машин Тьюринга. [1, с. 74–77]
16. Универсальная машина Тьюринга. [1, с. 84–86]
17. Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. [1, с. 77–79]
18. Замкнутость класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга, относительно операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. [1, с. 80–83]
19. Класс примитивно-рекурсивных функций. Простейшие примитивно-рекурсивные функции. [1, с. 102–105]
20. Класс частично-рекурсивных функций. Примеры частично-рекурсивных функций. [1, с. 79, 108–109]

21. Частичная рекурсивность вычислимых функций. Формула Клини. [1, с. 114–117]
22. Классы P и NP. Примеры задач из класса NP. [1, с. 89–93]
23. NP-полнота. Теорема Кука. [1, с. 95–99]
24. NP-полнота задачи 3-ВЫП. [1, с. 99–100]
25. Полиномиальная разрешимость задачи 2-ВЫП. [1, с. 101–102]

### III. Сложность структурной реализации функций алгебры логики из некоторых классов

26. Задача синтеза схем для функций (операторов) из специального класса, мощностные нижние оценки функции Шеннона для их сложности в случае невырожденного (ненулевого, квазиинвариантного) класса. [4, §1]
27. Инвариантные классы функций С. В. Яблонского, их описание на языке базовых множеств и порождающих элементов. Теорема о числе инвариантных классов и фрагменты её доказательства. [4, §11]
28. Синтез схем на основе модификации асимптотически наилучшего метода. Стандартные классы и стандартность класса функций, равных нулю на всех наборах значений переменных, номера которых больше заданного числа. [4, §2]
29. Асимптотически наилучший метод синтеза схем для ненулевых квазиинвариантных классов, их стандартность. [4, §3]
30. Общее описание принципа локального кодирования, его применение для доказательства стандартности класса самодвойственных функций. [4, §4]
31. Применение принципа локального кодирования для доказательства стандартности невырожденных классов симметрических операторов, операторов, связанных с вычислением функции на нескольких последовательных наборах. [4, §5]
32. Задача синтеза схем для не всюду определённых функций. Особенности получения нижней мощностной оценки соответствующей функции Шеннона, формулировка теоремы о её асимптотическом поведении. [4, §6]
33. Асимптотически наилучший метод синтеза схем для не всюду определённых функций в случае их «сильной» определённости. [4, §7]
34. Лемма о линейном разделяющем операторе. Асимптотически наилучший метод синтеза схем для не всюду определённых функций в случае их «средней» и «слабой» определённости. [4, §8]
35. Лемма о цепях и сечениях  $\pi$ -схем. Верхние оценки сложности реализации линейных функций в классе  $\pi$ -схем. [4, §9]
36. Теорема Храпченко, нижние оценки сложности линейной функции в классе  $\pi$ -схем. [4, §10]
37. Схемная и алгоритмическая сложность функций, построение сложно реализуемых функций. Гипотеза С. В. Яблонского и теорема Дж. Сэвиджа. [6, с. 42–45]

## 5. Типовые задачи к экзамену

### I. Задачи по конечным автоматам

1. Построить диаграмму Мура конечного автомата, распознающего заданное множество.
2. Используя правоинвариантные отношения эквивалентности, доказать, что заданное множество не является конечно-автоматным.
3. Построить регулярное выражение, определяющее заданное множество.
4. Построить диаграмму Мура конечного автомата, реализующего заданную функцию.
5. По диаграмме Мура построить канонические уравнения и схему в стандартном автоматном базисе.
6. По схеме в стандартном автоматном базисе построить канонические уравнения и диаграмму Мура.
7. Доказать полноту (относительно операций суперпозиции и обратной связи) заданного множества автоматных функций.

### II. Задачи по машинам Тьюринга, рекурсивным функциям и сложностным классам

8. Построить машину Тьюринга, вычисляющую заданную функцию или выполняющую заданное преобразование.
9. Доказать примитивную рекурсивность заданной функции.
10. Применить операцию минимизации к заданной (частичной) функции.
11. Доказать частичную рекурсивность заданной функции.
12. Доказать принадлежность к классу  $P$  заданного множества или задачи.
13. Доказать принадлежность к классу  $NP$  заданного множества или задачи.
14. Провести сведение заданной КНФ к 3-КНФ, сохраняющее выполнимость.
15. Применить полиномиальный алгоритм проверки выполнимости к заданной 2-КНФ.

### III. Задачи на сложность реализации функций алгебры логики (ФАЛ)

16. Выяснить, является ли заданный класс ФАЛ инвариантным классом, и, в случае инвариантности этого класса, найти его порождающее множество.
17. Выяснить, является ли заданный класс ФАЛ (операторов) вырожденным, и, в случае его невырожденности, получить нижнюю мощностную оценку функции Шеннона для сложности реализации ФАЛ из этого класса схемами из функциональных элементов (СФЭ) в стандартном базисе.
18. Получить верхнюю (асимптотически точную) оценку функции Шеннона для сложности реализации ФАЛ из заданного специального класса из определённых или не всюду определённых ФАЛ при их реализации СФЭ в стандартном базисе.
19. Получить требуемую нижнюю оценку сложности реализации заданной ФАЛ в классе  $\pi$ -схем.

## 6. Литература

1. Марченков С. С. Избранные главы дискретной математики. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 133 с.  
[https://mk.cs.msu.ru/images/2/25/ИзбрГлавыДискрМатем\\_2015.pdf](https://mk.cs.msu.ru/images/2/25/ИзбрГлавыДискрМатем_2015.pdf)
2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2003. — 384 с.
3. Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004. — 256 с.
4. Ложкин С. А. Дополнительные главы кибернетики. — МГУ, 2019.  
<https://mk.cs.msu.ru/images/0/0b/Dgcyb-lect-190113.pdf>
5. Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. — М.: Высшая школа, 2007. — 188 с.
6. Сапоженко А. А. Некоторые вопросы сложности алгоритмов. — М.: Изд-во МГУ, 2001. — 46 с.  
[https://mk.cs.msu.ru/images/e/e8/Sapozhenko\\_alg.pdf](https://mk.cs.msu.ru/images/e/e8/Sapozhenko_alg.pdf) (номера страниц не соответствуют печатному изданию)
7. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2005. — 416 с.
8. Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнёва С. Н. Задачи по курсу «Основы кибернетики»: 2-е изд. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2011. — 71 с.  
[https://mk.cs.msu.ru/images/a/ab/Задачи\\_по\\_курсу\\_Основы\\_кибернетики\\_2011.pdf](https://mk.cs.msu.ru/images/a/ab/Задачи_по_курсу_Основы_кибернетики_2011.pdf)

## 7. Особенности организации и контроля аудиторной и самостоятельной работы студентов

Данный вариант курса «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» является достаточно сложным и объёмным математическим курсом, усвоение которого требует от студентов полноценной и регулярной как аудиторной, так и самостоятельной работы, что невозможно без чёткой организации занятий, строгой дисциплины и систематического контроля. При этом необходимо, чтобы в рамках самостоятельной работы<sup>1</sup> студенты прорабатывали материал, пройденный на предшествующей лекции (семинаре), и желательно, чтобы они *знакомились с материалом предстоящей лекции (семинара)*.

Для контроля за освоением программы курса в течение семестра проводятся 3 основные (по 2 часа) контрольные работы. Контрольные работы призваны проверить знание и понимание определений, формулировок утверждений и т. п., а также умение решать задачи. Планируется осуществлять систематический (выборочный) контроль за работой студентов как на семинарах, так и на лекциях. Контрольные работы проводятся в рамках семинарских занятий, по одной основной контрольной на каждый из трёх разделов курса.

Информационные объявления, данные о посещаемости и текущей успеваемости студентов вывешиваются на сайте по адресу:

[Дополнительные\\_главы\\_дискретной\\_математики\\_и\\_кибернетики\\_\(2-й\\_поток,\\_4-й\\_курс\)](#)

## 8. О проведении экзамена по курсу «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики»

По результатам контрольных работ с учётом посещаемости студентов, их работы на лекциях и семинарах, а также самостоятельной работы каждому из них выставляется предварительная оценка.

Студенты с предварительной оценкой «3» или «4», не претендующие на её повышение, а также студенты с предварительной оценкой «5» сдают экзамен по упрощённой форме (без билета и без подготовки) в виде собеседования по программе курса (преимущественно на знание и понимание определений и формулировок утверждений) с целью подтверждения своей оценки.

Остальные студенты (с оценкой «2» или с оценками «3» и «4», претендующие на их повышение) получают билет, включающий в себя 2 теоретических вопроса и 1 задачу из трёх различных разделов курса, и после 15–20 минутной подготовки отвечают на него на уровне формулировок, утверждений и идей их доказательства. После ответа на билет проводится общее собеседование по другим вопросам программы.

Итоговая экзаменационная оценка, как правило, не может отличаться от предварительной оценки больше, чем на 1 балл.

---

<sup>1</sup>1 час самостоятельной работы на 1 час аудиторных занятий

## 9. Планы семинарских занятий на осенний семестр 2020–2021 уч. года

### Семинар 1

Множества, допускаемые конечными автоматами. Правоинвариантная эквивалентность. Теоретический материал [1, с. 27–31].

#### В классе и на дом.

1. Построить диаграмму Мура для автомата в алфавите  $\{1, 0\}$ , который допускает следующее множество:
  - (a) (1) Множество  $\{0, 1, \Lambda\}$ ; (2) Множество  $\{0, 1\}^* \setminus \{0, 1, \Lambda\}$ ;
  - (b) Все слова, начинающиеся на 01;
  - (c) Все слова длины 3, кроме 110;
  - (d) Все слова, содержащие 001;
  - (e) Все слова, имеющие вхождения слов 000 и 111.
2. Доказать конечную автоматность множеств:
  - (a) Конечное множество  $X$  в алфавите  $\{a_1, \dots, a_m\}$ ; множество  $\{a_1, \dots, a_m\}^* \setminus X$ ;
  - (b) Множество слов в алфавите  $\{0, 1\}$ , содержащие неперекрывающиеся слова 000, 001, 011;
  - (c) Множества вида  $0^{n_1}10^{n_2}1 \dots 10^{n_k}$ ,  $n_i \geq 1$ : (a) При каждом фиксированном  $k$ ; (b) При произвольном  $k$ .
3. Построить правоинвариантное отношение эквивалентности конечного индекса, объединением классов эквивалентности которого являются множества:
  - (a)  $\{\Lambda\}$ ;
  - (b)  $\{\Lambda, 0, 1\}$ ;
  - (c)  $\{0^n 1 : n \geq 0\}$ ;
  - (d) Слова чётной длины и 1, 111.
4. Для любого  $n \geq 2$  определить на  $\{0, 1\}$  правоинвариантное отношение эквивалентности индекса  $n$ .
5. Пользуясь правоинвариантным отношением эквивалентности доказать, что множества в алфавите  $\{0, 1\}$  НЕ конечно-автоматны:
  - (a)  $\{0^n 1^{2n}, n \geq 1\}$ ;
  - (b) Симметричные слова в любом не однобуквенном алфавите;
  - (c)  $\{0^{n^2}, n \geq 1\}$ .

### Семинар 2

Теоретико-множественные операции над конечно-автоматными множествами. Недетерминированные автоматы. Операции произведения и итерации. Теоретический материал [1, с. 32–39].



**В классе и на дом.**

1. Ввести операцию прямого произведения автоматов. Доказать замкнутость конечно-автоматных множеств относительно операций объединения и пересечения.
2. Сохраняют ли операции  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\cdot$ ,  $*$  класс не конечно-автоматных множеств?
3. Построить диаграмму Мура и описать множество, допускаемое недетерминированным автоматом:

$$\begin{aligned}Q &= \{q_1, q_2, q_3\}, \\f(0, q_1) &= \{q_2\}, \quad f(1, q_1) = \{q_1, q_2\}, \\f(0, q_2) &= \{q_3\}, \quad f(1, q_2) = \{q_3\}, \\f(0, q_3) &= \{q_3\}, \quad f(1, q_3) = \{q_2, q_3\}, \\F &= \{q_3\}.\end{aligned}$$

4. Построить методом детерминизации эквивалентный данному детерминированный автомат:

$$\begin{aligned}Q &= \{q_1, q_2, q_3\}, \\f(0, q_1) &= \{q_1, q_2\}, \quad f(1, q_1) = \{q_1\}, \\f(0, q_2) &= \{q_2\}, \quad f(1, q_2) = \{q_2, q_3\}, \\f(0, q_3) &= \{q_1, q_3\}, \quad f(1, q_3) = \{q_1, q_3\}, \\F &= \{q_3\}.\end{aligned}$$

5. Пусть  $\mathcal{A}_i = \{A, Q, f, q_1, F_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  (недетерминированные автоматы). Верно ли, что
  - (a) При  $F_2 = Q \setminus F_1$  выполнено  $D(\mathcal{A}_2) = A^* \setminus D(\mathcal{A}_1)$ ;
  - (b) При  $F_3 = F_1 \cap F_2$  выполнено  $D(\mathcal{A}_3) = D(\mathcal{A}_1) \cap D(\mathcal{A}_2)$ .
6. Построить недетерминированный автомат, который допускает произведение автоматных множеств  $D(\mathcal{A}) \cdot D(\mathcal{B})$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}: Q &= \{q_1, q_2, q_3\}, \\f(0, q_1) &= q_2, \quad f(1, q_1) = q_1, \\f(0, q_2) &= q_2, \quad f(1, q_2) = q_3, \\f(0, q_3) &= q_1, \quad f(1, q_3) = q_3, \\F &= \{q_1, q_3\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}: Q &= \{q_1, q_2\}, \\f(0, q_1) &= q_1, \quad f(1, q_1) = q_2, \\f(0, q_2) &= q_1, \quad f(1, q_2) = q_2, \\F &= \{q_2\}.\end{aligned}$$

7. Для автомата  $\mathcal{A}$  из предыдущей задачи построить недетерминированный автомат, принимающий  $D(\mathcal{A})^*$ .
8. Построить из множеств  $\{0\}$ ,  $\{1\}$  при помощи объединения, произведения и итерации множество всех слов, содержащих подслово 0001.

9.  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ . Сколько раз необходимо применить операцию итерации, чтобы получить множество  $A^* \setminus \{\bar{a}\}$  при помощи объединения, произведения и итерации из множеств вида  $\{a_i\}$ ?
10. Пусть множество  $X$  состоит из  $n$  слов. Может ли множество  $X \cdot X$  содержать больше  $n^2$  слов? Меньше  $n^2$  слов? В точности  $n^2$  слов?

### Семинар 3

Регулярные выражения и регулярные множества. Теорема Клини. Теоретический материал [1, с. 40–42].

**В классе и на дом.**

1. Доказать регулярность множеств слов в алфавите  $\{0, 1\}$ :
  - (а) Любое конечное множество слов и дополнение к конечному множеству;
  - (б) Множество слов, содержащих в качестве подслова одно из слов  $x_1, \dots, x_n$ ;
  - (с) Множество слов, не содержащих  $01$ ;
2. Привести пример бесконечного регулярного множества, которое невозможно получить однократным использованием итерации.
3. Пусть  $X$  — регулярное множество в алфавите  $\{a_1, \dots, a_m\}$ ;  $Y_1, \dots, Y_m$  — регулярные множества в алфавите  $\{b_1, \dots, b_n\}$ . Доказать, что множество  $S_{Y_1 \dots Y_m}^{a_1 \dots a_m} X$  слов, получаемых одновременной заменой букв  $a_1, \dots, a_m$  в любом слове из  $X$  любыми словами из  $Y_1, \dots, Y_m$  соответственно является регулярным.
4. Пусть  $X$  — регулярное множество,  $\text{Rev}(X)$  — множество обращений слов из  $X$ . Доказать, что оно тоже будет регулярным.
5. Пусть  $X$  — конечно-автоматное множество в алфавите  $A$ ,  $Y$  — конечно-автоматное множество в однобуквенном алфавите. Обозначим через  $X/Y$  множество тех слов из  $X$ , длины которых являются длинами слов из  $Y$ . Доказать, что множество  $X/Y$  конечно-автоматно.

### Семинар 4

Детерминированные функции. Построение диаграмм Мура и канонических уравнений. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике.

**В классе.** Из [7, глава IV]: 1.1 (1, 3, 8, 9), 1.2 (1), 2.1 (1, 6, 16), 2.4 (1, 3), 2.5 (3).

**На дом.** Из [7, глава IV]: 1.1 (4, 6, 9, 13), 1.2 (2), 2.1 (3, 7), 2.4 (1, 3), 2.5 (3).

### Семинар 5

Операции суперпозиции и обратной связи. Построение схем из автоматных элементов. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике.

**В классе.** Из [7, глава IV]: 2.8 (3, 6), 2.9 (4), 2.13 (1, 4), 2.14 (1, 4), 2.17 (1, 4).

**На дом.** Из [7, глава IV]: 2.8 (5, 8), 2.9 (5), 2.13 (6, 11), 2.14 (2, 5), 2.17 (2, 5).

### Семинар 6

Машины Тьюринга. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике.

**В классе.** Из [7, глава V]: 1.8 (1, 3), 1.4 (2); 1.14 (1, 2, 3, 4, 9, 10), 1.15 (2, 7).

**На дом.** Из [7, глава V]: 1.8 (2, 6), 1.4 (4), 1.14 (5, 6, 7, 12), 1.15 (4, 6).

### Семинар 7

Примитивно-рекурсивные функции. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике. См. также [1, с. 78].

**В классе.** Из [7, глава V]: 2.1 (9, 10, 12), 2.2 (1, 3); применить операцию примитивной рекурсии к частичным функциям  $g(x) = 2x$  и  $h(x, y, z) = z - 2$ ; 2.3 (9, 10, 5), 2.4 (1, 2, 5, 76).

**На дом.** Из [7, глава V]: 2.1 (2, 4), 2.4 (3, 7а), 2.3 (7, 8, 9).

### Семинар 8

Операции ограниченного суммирования и мультиплицирования. Операция минимизации. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике. См. также [1, с. 102–107].

**В классе.** Используя операции  $\prod_{i \leq x}$  и  $\sum_{i \leq x}$  доказать примитивную рекурсивность функций  $\lfloor x/y \rfloor$ ,  $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ ,  $\lfloor \log_a x \rfloor$ , «число делителей  $x$ », «число решений полиномиального уравнения в заданном промежутке».

Из [7, глава V]: 2.5 (1, 2, 3, 7, 11), 2.7 (2, 6).

**На дом.** Используя операции  $\prod_{i \leq x}$  и  $\sum_{i \leq x}$  доказать примитивную рекурсивность функций  $p(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , где

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — простое число.} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$f_1(x)$  — количество чисел вида  $y^y$  на отрезке  $[0, x]$ .  $f_2(x)$  — количество чисел вида  $2^y \cdot 3^z$  на отрезке  $[0, x]$ .

Из [7, глава V]: 2.5 (4, 10, 13), 2.7 (3, 5).

### Семинар 9

Частично-рекурсивные функции. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике. См. также [1, с. 108–113].

**В классе.** Из [7, глава V]: 2.8 (1, 2, 5).

Доказать частичную рекурсивность функций:

1.  $f^{-1}(x)$ , где  $f$  — общерекурсивная перестановка (биективная функция) на  $\mathbb{N}_0$ ;

$$2. f(x) = \begin{cases} x, & x \in \{a_1, \dots, a_m\}, \\ \text{не определено,} & \text{иначе,} \end{cases} \quad a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}_0;$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x, & f_1(x) \geq f_2(x), \\ \text{не определено,} & \text{иначе,} \end{cases}$$

$f_1(x), f_2(x)$  — примитивно-рекурсивные функции;

4.  $x/y$ ;

5.  $\sqrt{x}$ ;

$$6. f(x) = \begin{cases} x, & \text{в последовательности } g \text{ есть две единицы на расстоянии } x + 1, \\ \text{не определено,} & \text{иначе,} \end{cases}$$

$g(z)$  — примитивно-рекурсивная функция, принимающая значения 0, 1 (двоичная последовательность).

**На дом.** Из [7, глава V]: 2.8 (3).

Доказать частичную рекурсивность функций:

$$1. f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ входит в пересечение областей значений} \\ & \text{частично-рекурсивных функций } g_1(z), g_2(z), \\ \text{не определено,} & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ входит в область значений функции } g, \\ \text{не определено,} & \text{иначе,} \end{cases}$$

$g(z)$  — примитивно-рекурсивная функция, например  $z^2, 2^z$ ;

3.  $x - y$ ;

4.  $\log_2 x$ ;

$$5. f(x) = \begin{cases} x, & \text{в последовательности } g \text{ есть } x + 1 \text{ идущих подряд единиц,} \\ \text{не определено,} & \text{иначе,} \end{cases}$$

$g(z)$  — примитивно-рекурсивная функция, принимающая значения 0, 1 (двоичная последовательность).

### Семинар 10

Класс P. Теоретический материал имеется в задачнике.

**В классе.** Из [8]: 2.3 (2, 4, 5, 7); доказать, что задача определения существенных переменных у функции, заданной таблицей значений, может быть выполнена на машине Тьюринга за полиномиальное время; 2.19 (7), 2.20 (1а, 2а, 2д, 3а, 4а).

**На дом.** Из [8]: 2.3 (6, 8, 9, 10), 2.19 (1), 2.20 (1г, 2г, 3г).

### Семинар 11

P-сводимость и NP-полнота. Теоретический материал имеется в задачнике.

**В классе и на дом.** Из [8]: 2.18 (1), 2.19 (4), 2.20 (1б, 1в, 2б, 3в), 2.11(1, 2), 2.7(2(1, 2)).

### Семинар 12

Постановка задачи синтеза схем для ФАЛ (операторов) из специальных классов, мощностные характеристики этих классов и соответствующие нижние оценки функций Шеннона для их сложности. Инвариантные и квазиинвариантные классы ФАЛ, их структурное описание и особенности, поведение мощностных последовательностей. Теоретический материал [4, §§1,11].

**В классе.**

1. Выяснить, какие из следующих классов ФАЛ (операторов) являются невырожденными, и получить нижние мощностные оценки (НМО) функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из данных классов СФЭ в стандартном базисе:

(а)  $Q$  — класс ФАЛ, равных 1 при  $x_1 = 0$ ;

(б)  $Q$  — класс ФАЛ, симметричных по БП  $x_1, x_2, x_3$ ;

(в)  $Q$  — класс ФАЛ, монотонных по БП  $x_1, x_2$ ;

(г)  $Q$  — класс ФАЛ, равных 0 на наборах с чётным числом 1;

(д)  $Q$  — класс линейных ФАЛ;

- (f)  $Q$  — класс самодвойственных ФАЛ;
- (g)  $Q$  — класс симметрических ФАЛ;
- (h)  $Q$  — класс операторов вида  $F = (f_1, f_2, f_3)$  таких, что  $f_1 \cdot f_2 \equiv 0$  при  $i \neq j$  и  $f_1 \vee f_2 \vee f_3 \equiv 1$ .

2. Выделить среди классов ФАЛ из п. 1 квазиинвариантные и инвариантные классы, для которых найти пределы соответствующих им мощностных последовательностей.

3. Найти порождающее множество класса линейных ФАЛ.

#### На дом.

1. Исследовать на невырожденность и, в случае невырожденности, установить асимптотику НМО функции Шеннона  $L^C(Q(n))$  для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП  $x_1, \dots, x_n$  из класса  $Q$ , где:

- (a)  $Q$  — класс ФАЛ, равных 1 при  $x_1 = x_2 = 1$ ;
- (b)  $Q$  — класс ФАЛ, монотонных по  $x_1$  и антимонотонных по  $x_2$ ;
- (c)  $Q$  — класс ФАЛ, у которых любая подфункция от БП  $x_1, x_2$  принадлежит множеству  $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1, x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \sim x_2\}$ ;
- (d)  $Q$  — класс ФАЛ, симметричных по своим  $n, n = 1, 2, \dots$  существенным БП с рабочими числами вида  $a, a + 4, a + 8, \dots, a + 4k$ , где  $a \in \{0, 1, 2, 3\}$  и  $k = \lfloor (n - a)/4 \rfloor$ ;
- (e)  $Q$  — класс операторов  $F = (f_1, f_2)$  таких, что  $f_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \bar{f}_1(\beta_1, \dots, \beta_n)$ , где набор  $\beta$  имеет номер на единицу больше, чем набор  $\tilde{\alpha}$ , если  $\tilde{\alpha} \neq (1, \dots, 1)$ , и равен нулевому набору в противном случае.

2. Выделить среди классов ФАЛ из п. 1 квазиинвариантные и инвариантные классы, для которых найти пределы соответствующих им мощностных последовательностей.

3. Найти порождающее множество инвариантного класса ФАЛ, состоящего из констант и всех монотонных элементарных конъюнкций.

#### Семинар 13

Синтез схем для ФАЛ из специальных классов, установление асимптотики соответствующих функций Шеннона. Теоретический материал [4, §§2–5].

**В классе.** Установить асимптотическое поведение функции Шеннона  $L^C(Q(n))$  для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП  $x_1, \dots, x_n$  из класса  $Q$ , где  $Q$  — один из невырожденных классов, указанных в классной задаче 1 семинара 12.

**На дом.** Установить асимптотическое поведение функции Шеннона  $L^C(Q(n))$  для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП  $x_1, \dots, x_n$  из класса  $Q$ , где  $Q$  — один из невырожденных классов, указанных в домашней задаче 1 семинара 12.

#### Семинар 14

Сложность не всюду определённых функций, их использование при синтезе схем для ФАЛ из специальных классов. Теорема Храпченко. Теоретический материал [4, §§6–10].

**В классе.**

1. Найти сложность не всюду определённой ФАЛ  $f$ ,  $f \in \hat{P}_2(3)$ , для которой  $\tilde{\alpha}_f = (0001\ 1222)$ .
2. Найти асимптотику функции Шеннона  $L^C(Q(n))$  для сложности реализации ФАЛ от БП  $x_1, \dots, x_n$  из класса  $Q(n)$ , включающего в себя все те ФАЛ, которые обращаются в ноль на наборах куба  $B^n$ , имеющих не меньше  $n/2$  единиц.
3. Доказать, что  $12 \leq L^\pi(s_4^2) \leq 16$ , где  $s_n^I$  — симметрическая ФАЛ от  $n$  БП, «рабочие» числа которой составляют множество  $I$ ,  $I \subseteq [0, n]$ .
4. Доказать, что  $L^\pi((x_1 \oplus \dots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \dots \oplus x_n)) \geq n^2/2$ .

**На дом.**

1. Найти сложность не всюду определённой ФАЛ  $f$ ,  $f \in \hat{P}_2(3)$ , для которой  $\tilde{\alpha}_f = (0111\ 2221)$ .
2. Найти асимптотику функции Шеннона  $L^C(Q(n))$  для сложности реализации ФАЛ от БП  $x_1, \dots, x_n$  из класса  $Q(n)$ , включающего в себя все те ФАЛ, которые обращаются в ноль на наборах куба  $B^n$ , имеющих не равное  $i$ ,  $1 \leq i \leq n - 2$  число единиц.
3. Доказать, что  $63 \leq L^\pi(s_8^{\{2,4,6\}}) \leq 80$ .
4. Доказать, что  $L^\pi((x_1 \oplus \dots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \dots \oplus x_s)(x_{s+1} \oplus \dots \oplus x_n)) \geq n^2/3$ , где  $1 \leq k < s < n$ .