Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 3

Логика предикатов:
синтаксис, семантика

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен он не сдаст

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен он не сдаст

логика высказываний:

$$\mathrm{Shirk} \to \neg \mathrm{Pass}$$

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен он не сдаст

$$\forall x\ (\mathrm{Shirk}(x) \to \neg \mathrm{Pass}(x))$$

Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

Если кто-то прогуливает лекции,
то экзамен не сдаст его сосед

логика предикатов:

$$\forall x\ (\mathrm{Shirk}(x) \to \neg \mathrm{Pass}(\textbf{neighbour}(x)))$$

Логика предикатов изучает законы причинно-следственной зависимости между утверждениями, основанными на **отношениях** между произвольными предметами

Формальный язык логики предикатов ориентирован на описание таких отношений

Немного о названии «логика предикатов»

Предикат:

- preadicatum (латинский) — сказанное (сказуемое), объявленное[1]
- понятие, определяющее предмет суждения (субъект)[2]

Кто-то	прогуливает	лекцию
(*субъект*)	(*предикат*)	(*объект*)

Чуть более общо и развёрнуто, предикат — это

- свойство, атрибут предмета, явления, события, ...
- отношение между явлениями, предметами, событиями, ...

1 Дворецкий. Латинско-русский словарь

2 Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Немного о названии «логика предикатов»

классическая
логика
предикатов
первого порядка

Немного о названии «логика предикатов»

II

логика
предикатов
первого порядка

Немного о названии «логика предикатов»

III

логика
предикатов

Немного о названии «логика предикатов»

IV

логика

первого порядка

Немного о названии «логика предикатов»

Будем использовать такое название:

логика
предикатов

Логика предикатов: алфавит

Базовые символы

Предметные константы

Ими обозначаются конкретные (именованные, фиксированные) предметы

Например: **я**, **2**, $\boldsymbol{\pi}$, **Солнце**, $\mathbf{c_1}$, ...

Const — множество всех констант

Предметные переменные

Ими обозначаются безымянные (нефиксированные) предметы

Они будут записываться привычно: x, y', z_4, ...

Var — множество всех переменных

Далее это множество полагается счётным и заданным однозначно

Логика предикатов: алфавит

Базовые символы

Функциональные символы

Ими обозначаются операции над предметами

Например: $+$, **сосед**, **lim**, ...

Каждому функциональному символу сопоставляется особое натуральное число — местность

$\mathbf{f}^{(k)}$ — запись функционального символа **f** с обозначением местности k

Func — множество всех функциональных символов с сопоставленными им местностями

Предикатные символы

Ими обозначаются отношения между предметами и свойства предметов

Например: $<$, **является_соседом**, **красный**, ...

При задании языка логики предикатов каждому предикатному символу сопоставляется особое натуральное число — местность

$\mathrm{P}^{(k)}$ — запись предикатного символа P с обозначением местности k

Pred — множество всех предикатных символов с сопоставленными им местностями

Логика предикатов: алфавит

Логические операции

Логические связки $\&$ $\vee$ $\neg$ $\to$

Кванторы

Квантор всеобщности   («для любого предмета»): $\forall$

Квантор существования   («существует предмет»): $\exists$

Знаки препинания   (   )   ,

Сигнатурой алфавита логики предикатов называется тройка

$$\langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$$

Устройство языка логики предикатов
однозначно определяется выбором сигнатуры:
все символы, не обозначенные в сигнатуре, определены однозначно

Логика предикатов: синтаксис

БНФ, определяющая синтаксис формул логики предикатов:

$$
\begin{array}{rcl}
t & ::= & \mathrm{x} \;\mid\; \mathbf{c} \;\mid\; \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \\
\varphi & ::= & \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \;\mid \\
 & & (\varphi \,\&\, \varphi) \;\mid\; (\varphi \vee \varphi) \;\mid\; (\varphi \to \varphi) \;\mid\; (\neg\varphi) \;\mid \\
 & & (\forall \mathrm{x}\; \varphi) \;\mid\; (\exists \mathrm{x}\; \varphi),
\end{array}
$$

где:

- φ — формула
- $t, t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы
- $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}$
- $\mathbf{c} \in \mathsf{Const}$
- $\mathbf{f}^{(n)} \in \mathsf{Func}$
- $\mathrm{P}^{(k)} \in \mathsf{Pred}$

Логика предикатов: синтаксис / термы

$$t ::= \mathtt{x} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

При помощи термов описываются предметы, получающиеся в результате применения заданных функций (операций) к заданным предметам

Например: $(\mathtt{z} \in \mathsf{Var};\ \mathbf{1} \in \mathsf{Const};\ +^{(2)}, \cdot^{(2)} \in \mathsf{Func})$

1. Предмет, обозначенный переменной $\mathtt{z}$:

   $$\mathtt{z}$$

2. Предмет, обозначенный константой $\mathbf{1}$:

   $$\mathbf{1}$$

3. Предмет, получающийся применением операции $+$ к (1) и (2):

   $$+(\mathbf{1}, \mathtt{z})$$

4. Предмет, получающийся применением операции $\cdot$ к (1) и (3):

   $$\cdot(\mathtt{z}, +(\mathbf{1}, \mathtt{z}))$$

5. Более наглядная инфиксная форма записи терма (4):

   $$\mathtt{z} \cdot (\mathbf{1} + \mathtt{z})$$

Логика предикатов: синтаксис / термы

$$t ::= \mathtt{x} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{f}^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

Term — множество всех термов

(*над заданными множествами* Var, Const, Func)

$\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — сокращённая запись последовательности «$\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}$»

Если t — терм, то:

Var_t — множество всех переменных, входящих в терм t

$t(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — синоним записи t, если $\mathrm{Var}_t \subseteq \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$

Терм t — основной, если $\mathrm{Var}_t = \emptyset$

Пример: если $\mathtt{x} \in \mathrm{Var}$, $\mathbf{1}, \mathbf{3} \in \mathrm{Const}$ и $+^{(2)}, \cdot^{(2)} \in \mathrm{Func}$, то терм

$$\mathbf{3} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{3})$$

является основным, а терм

$$\mathbf{3} \cdot (\mathbf{1} + \mathtt{x})$$

не является

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \;::=\; \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \;\mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid (\neg\varphi) \mid (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \mid (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

При помощи формул описываются отношения между предметами, строящиеся из «базовых» отношений при помощи логических операций

В некоторых случаях (*отношение местности 0*) формулой может описываться и высказывание, оцениваемое как истина или ложь

Например: $(\mathrm{P}^{(2)}, \mathrm{R}^{(1)} \in \mathsf{Pred};\ \mathbf{f}^{(2)} \in \mathsf{Func};\ \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathsf{Var})$

1. Предмет y и предмет, получающийся из предметов x и y применением операции $\mathbf{f}$, входят в отношение P:
$$\mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))$$
2. Для любого предмета x верно (1):
$$(\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$
3. Если верно (2), то предмет y обладает свойством R:
$$((\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to \mathrm{R}(\mathrm{y}))$$
4. Хотя бы для одного предмета y верно (3)
$$(\exists \mathrm{y}\ ((\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to \mathrm{R}(\mathrm{y})))$$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Формула атомарна (является атомом), если имеет вид $\mathrm{P}(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, где $\mathrm{P}^{(k)} \in \mathsf{Pred}$ и $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathsf{Term}$

Остальные формулы называются составными

Form — множество всех формул
(*в алфавите с заданной сигнатурой*)

Приоритет логических операций (в порядке убывания):

$$\forall,\ \exists,\ \neg;\ \text{затем}\ \&;\ \text{затем}\ \vee;\ \text{затем}\ \to$$

Как работают приоритеты (пример)

Следующие формулы считаются синтаксически одинаковыми:

$$\forall \mathrm{x}\ \neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$
$$\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$
$$(\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}))) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y})))$$
$$((\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}))) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y})))$$
$$(((\forall \mathrm{x}\ (\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}))) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg\mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))))$$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ | \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ | \ (\varphi \vee \varphi) \ | \ (\varphi \to \varphi) \ | \ (\neg\varphi) \ | \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ | \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Переменная y связана квантором $\exists$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Переменная x связана квантором $\forall$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \;::=\; \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \;\mid\; (\varphi \,\&\, \varphi) \;\mid\; (\varphi \vee \varphi) \;\mid\; (\varphi \to \varphi) \;\mid\; (\neg\varphi) \;\mid\; (\forall \mathrm{x}\; \varphi) \;\mid\; (\exists \mathrm{x}\; \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\; \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}\underbrace{(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))}_{\text{Область действия квантора } \exists}$$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \;::=\; \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \;\mid\; (\varphi \,\&\, \varphi) \;\mid\; (\varphi \vee \varphi) \;\mid\; (\varphi \to \varphi) \;\mid\; (\neg\varphi) \;\mid\; (\forall \mathrm{x}\; \varphi) \;\mid\; (\exists \mathrm{x}\; \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\; \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \underbrace{\neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))}_{\text{Область действия квантора } \forall} \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid$$
$$(\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Связанные вхождения переменной y

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi ::= \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \mid (\varphi \,\&\, \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid (\neg\varphi) \mid (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \mid (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Связанное вхождение переменной x

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ | \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ | \ (\varphi \vee \varphi) \ | \ (\varphi \to \varphi) \ | \ (\neg\varphi) \ | \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ | \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\exists \mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула φ

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

Пример:

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \boxed{\neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))} \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Свободное вхождение переменной x

Логика предикатов: синтаксис / формулы

$$\varphi \ ::= \ \mathrm{P}^{(k)}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \ \mid \ (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \rightarrow \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \ (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi)$$

Var_φ — множество всех свободных переменных формулы φ

Если φ — формула, то:

- $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ — синоним записи φ, если $\mathsf{Var}_\varphi \subseteq \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathrm{n}\}$
- если $\mathsf{Var}_\varphi = \emptyset$, то φ — замкнутая формула, или предложение

CForm[1] — множество всех замкнутых формул
(*в алфавите с заданной сигнатурой*)

1 Closed Formulae

Логика предикатов: семантика

Как и в логике высказываний, смысл формуле логики предикатов придаёт интерпретация — «мир, в котором живёт формула»

Интерпретация состоит из

- предметов, населяющих мир
- операций над предметами
  - (это смысл **функциональных символов**)
- отношений, связывающих предметы
  - (это смысл **предикатных символов**)

Таким образом, в основе интерпретаций логики предикатов лежат алгебраические системы[1]

---

1 не следует пугаться этого термина;
это и есть совокупность «предметы + операции + отношения»

Логика предикатов: семантика

Интерпретация (*сигнатуры* $\langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$) — это система $\langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \rangle$, где:

- D — непустое множество предметов (область интерпретации; предметная область; универсум)
- $\overline{\mathrm{Const}} : \mathrm{Const} \to \mathrm{D}$ — оценка констант
- $\overline{\mathrm{Func}} : \mathrm{Func} \to \cup_{n \geq 1}(\mathrm{D}^n \to \mathrm{D})$ — оценка функциональных символов
- $\overline{\mathrm{Pred}} : \mathrm{Pred} \to \cup_{n \geq 1}(\mathrm{D}^n \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\})$ — оценка предикатных символов

$\overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathrm{Const}}(\mathbf{c})$ — предмет, сопоставленный константе $\mathbf{c}$

$\overline{\mathbf{f}} = \overline{\mathrm{Func}}(\mathbf{f}) : \mathrm{D}^n \to \mathrm{D}$ — функция, сопоставленная символу $\mathbf{f}^{(n)}$

$\overline{\mathrm{P}} = \overline{\mathrm{Pred}}(\mathrm{P}) : \mathrm{D}^n \to \{\mathbb{t}, \mathbb{f}\}$ — предикат, сопоставленный символу $\mathrm{P}^{(n)}$

Логика предикатов: семантика

Пример

Сигнатура: Const $= \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}\}$, Func $= \{\mathbf{f}^{(1)}\}$, Pred $= \{\mathrm{P}^{(1)}, \mathrm{R}^{(2)}\}$

Интерпретация:

предметная область: $D = \{0, 1, 2\}$

оценка констант: $\overline{\mathbf{c_1}} = 0$, $\overline{\mathbf{c_2}} = 1$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{\mathrm{P}}(x)$

x	$\overline{\mathrm{P}}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{\mathrm{R}}(x, y)$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

Логика предикатов: семантика термов

Значение $t(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})[\widetilde{d^n}]$ терма $t(\widetilde{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации — это предмет, задаваемый так:

- для терма-переменной $\mathtt{x}_i$:
$$\mathtt{x}_i[\widetilde{d^n}] = d_i$$
- для терма-константы $\mathbf{c}$:
$$\mathbf{c}[\widetilde{d^n}] = \overline{\mathbf{c}}$$
- для остальных термов:
$$\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k)[\widetilde{d^n}] = \overline{\mathbf{f}}(t_1[\widetilde{d^n}], \ldots, t_k[\widetilde{d^n}])$$

Логика предикатов: семантика формул

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$) определяется так:

- атомарная формула:
  $$\mathcal{I} \models \mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k)[\widetilde{d}^n]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $$\overline{\mathrm{P}}(t_1[\widetilde{d}^n], \ldots, t_k[\widetilde{d}^n]) = \mathbb{t}$$

- отрицание:
  $$\mathcal{I} \models (\neg\varphi)[\widetilde{d}^n]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $$\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d}^n]$$

Логика предикатов: семантика формул

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$) определяется так:

- конъюнкция:

  $\mathcal{I} \models (\varphi \,\&\, \psi)[\widetilde{d}^n]$

  $\Leftrightarrow$

  $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$ и $\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$

- дизъюнкция:

  $\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\widetilde{d}^n]$

  $\Leftrightarrow$

  $\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n]$ или $\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$

- импликация:

  $\mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)[\widetilde{d}^n]$

  $\Leftrightarrow$

  $\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d}^n]$ или $\mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d}^n]$

Логика предикатов: семантика формул

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\tilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \dots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\tilde{d}^n]$) определяется так:

- квантор всеобщности:
  $\mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}_0\ \varphi(\mathrm{x}_0, \tilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}))[\tilde{d}^n] \qquad \Leftrightarrow$
  для любого предмета d_0 из области интерпретации верно
  $\mathcal{I} \models \varphi(\mathrm{x}_0, \tilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[d_0, \tilde{d}^n]$
- квантор существования:
  $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{x}_0\ \varphi(\mathrm{x}_0, \tilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}))[\tilde{d}^n] \qquad \Leftrightarrow$
  хотя бы для одного предмета d_0 из области интерпретации верно
  $\mathcal{I} \models \varphi(\mathrm{x}_0, \tilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[d_0, \tilde{d}^n]$

$\varphi[\mathrm{x}_1/d_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}/d_n]$ — синоним записи $\varphi(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})[d_1, \dots, d_n]$

В записи «$\mathcal{I} \models \varphi[]$» отношения выполнимости предложения φ на пустом наборе предметов будем, как правило, опускать «пустые» квадратные скобки и писать просто $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: примеры

Рассмотрим интерпретации такого вида:

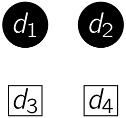
предметная область — квадраты и круги белого и чёрного цвета, расположенные на плоскости

сигнатура состоит из пяти предикатных символов, отвечающих следующим свойствам:

$C(x)$: «x — круг»
$S(x)$: «x — квадрат»
$B(x)$: «x — чёрный предмет»
$W(x)$: «x — белый предмет»
$U(x, y)$: «предмет x лежит под предметом y»

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

Формула содержательно прочитывается так:

Для каждого предмета x: если он является белым и является квадратом, то существует предмет y, такой что он является чёрным, и он является кругом, и предмет x лежит под предметом y

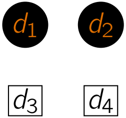
Проще говоря,

Каждый белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом

Чтобы строго убедиться, что это утверждение верно в $\mathcal{I}$, следует проверить соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{C}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

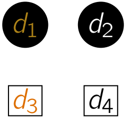
Переберём все предметы, подставляя их на место x

1. $\mathrm{x} \leftarrow d_1$:
   - $\mathcal{I} \not\models \mathrm{W}(\mathrm{x})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{S}(\mathrm{x}))[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{C}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_1]$

2. $\mathrm{x} \leftarrow d_2$:
   - $\mathcal{I} \not\models \mathrm{W}(\mathrm{x})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{S}(\mathrm{x}))[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x})\ \&\ \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{C}(\mathrm{y})\ \&\ \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_2]$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{W}(\mathtt{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место $\mathtt{x}$

3. $\mathtt{x} \leftarrow d_3$:
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{B}(\mathtt{y})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{C}(\mathtt{y})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})[\mathtt{y}/d_1, \mathtt{x}/d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y}))[\mathtt{y}/d_1, \mathtt{x}/d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})))[d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathtt{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})))[d_3]$

Семантика: примеры

$d_1 \quad d_2$

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

$\boxed{d_3} \quad \boxed{d_4}$

и такую формулу φ:

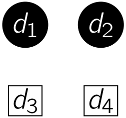
$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место x

4. $\mathrm{x} \leftarrow d_4$:
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{B}(\mathrm{y})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{C}(\mathrm{y})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})[\mathrm{y}/d_2, \mathrm{x}/d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))[\mathrm{y}/d_2, \mathrm{x}/d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_4]$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:



и такую формулу φ:

$$\forall x\ (W(x) \,\&\, S(x) \rightarrow \exists y\ (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y)))$$

Итого:

$$\mathcal{I} \models (W(x) \,\&\, S(x) \rightarrow \exists y\ (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y)))[d_1]$$

$$\mathcal{I} \models (W(x) \,\&\, S(x) \rightarrow \exists y\ (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y)))[d_2]$$

$$\mathcal{I} \models (W(x) \,\&\, S(x) \rightarrow \exists y\ (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y)))[d_3]$$

$$\mathcal{I} \models (W(x) \,\&\, S(x) \rightarrow \exists y\ (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y)))[d_4]$$

А значит,

$$\boxed{\mathcal{I} \models \forall x\ (W(x) \,\&\, S(x) \rightarrow \exists y\ (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y)))}$$

Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

сигнатура: Const $= \emptyset$, Func $= \{\mathbf{f}^{(1)}\}$, Pred $= \{\mathrm{P}^{(1)}, \mathrm{R}^{(2)}\}$

предметная область: $\mathrm{D} = \{0, 1, 2\}$

оценки функциональных и предикатных символов:

$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

x	$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$
0	1
1	2
2	0

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

x	$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

и такую формулу φ:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\ \&\ \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))))$$

Проверим соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

x	$\bar{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\bar{P}(x)$

x	$\bar{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\bar{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

x \ y	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models R(x,y)[y/0, x/2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models R(x,y)[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[1]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[1]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[1]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[1]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[1]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathfrak{t}$
1	$\mathfrak{f}$
2	$\mathfrak{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/2, x/2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \mathbin{\&} \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/2, x/2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/2, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x, y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$$

Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

x	$\overline{\mathbf{f}}(x)$
0	1
1	2
2	0

$\overline{P}(x)$

x	$\overline{P}(x)$
0	$\mathbb{t}$
1	$\mathbb{f}$
2	$\mathbb{t}$

$\overline{R}(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$
1	$\mathbb{t}$	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$
2	$\mathbb{f}$	$\mathbb{t}$	$\mathbb{t}$

$$\mathcal{I} \models P(x)[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (\exists y\,(R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$$

$$\mathcal{I} \not\models (P(x) \to \exists y\,(R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$$

Значит,

$$\boxed{\mathcal{I} \not\models \forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))}$$