

Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 19

Символьные представления моделей

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, осенний семестр

Вступление

Базовый алгоритм model checking для CTL

- ▶ идеологически прост: сводит задачу проверки выполнимости формулы на модели к набору хорошо известных задач теории графов:
 - ▶ выделение компонент сильной связности,
 - ▶ проверка достижимости вершин
 - ▶ ...
- ▶ теоретически эффективен: линеен относительно размера модели и относительно размера формулы

Вступление

Но у базового алгоритма есть и недостатки

Для примера можно представить *относительно небольшую* систему из 20 процессов, в каждом из которых содержится 20 булевых переменных

В такой системе будет более 10^{120} состояний (*чтобы осознать, насколько это много: больше числа гугл*)

В базовом алгоритме граф модели хранится **явно и полностью**, что приводит к неразумному и даже невозможному расходу памяти

А можно ли сократить расход памяти, представив модель более эффективно?

Вступление

Напоминание: конечная модель Крипке $M = (S, S_0, \rightarrow, L)$ — это

- ▶ **конечное множество** состояний S
- ▶ **конечное множество** начальных состояний S_0
- ▶ **отношение переходов на паре конечных множеств** состояний \rightarrow
- ▶ **функция разметки**, сопоставляющая каждому состоянию **конечное множество** L

Другое напоминание:

- ▶ $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ (будем использовать 0 как синоним f и 1 как синоним t)
- ▶ **Булева функция** местности n — это функция $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$

Символьные представления

Символьные представления — это семейство эффективных представлений структур (графовых и не только), становящееся всё более популярным в практике «умного» программирования, и коротко можно описать его так:

1. Представляемый объект переписывается (кодируется) как совокупность множеств наборов полей и единиц заданной длины
2. Каждое множество S наборов полей и единиц длины n расценивается как **характеристическое множество** n -местной булевой функции f_S : $f_S(\tilde{\alpha}) = 1 \Leftrightarrow \tilde{\alpha} \in S$
3. Выбирается подходящее представление получающихся булевых функций в зависимости от природы исходных объектов и от того, как с ними предполагается взаимодействовать (*этот пункт необязателен, пока речь не идёт о программной реализации*)
4. Символьное представление объекта — это совокупность представлений булевых функций, кодирующих объект, и реализация требуемых операций над объектом в терминах булевых функций

Символьное представление графа

Начнём с простого **примера**: опишем символьное представление конечного ориентированного графа $G = (V, E)$, где V — это конечное множество вершин и $E \subseteq V \times V$ — множество дуг (двуместное отношение на множестве вершин)

Пронумеруем вершины графа: $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$

Сопоставим каждой вершине уникальное число — например, её номер:
 $V_{\mathbb{N}} = \{0, 1, \dots, n\}$

Как-либо выберем такое количество бит k , в которое вмещается двоичная запись наибольшего рассматриваемого числа — например,
 $k = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$

Символьное представление графа

Заменим каждое число i на его двоичную запись $(i)_2^k$ в k битах

В результате получим множество наборов нулей и единиц длины k , представляющее множество V :

$$V_{\mathbb{B}} = \{(00 \dots 00), (00 \dots 01), (00 \dots 10), \dots, (n)_2^k\}$$

Перейдём от этого множества к булевой функции: $f_{V_{\mathbb{B}}}((i)_2^k) \Leftrightarrow i \leq n$

Будем считать, что это функция над переменными x_0, \dots, x_{k-1} , от младшего (правого) бита двоичной записи к старшему (левому)

Представим как-либо эту функцию — например (но так обычно не делают), в виде совершенной ДНФ: $\varphi_V = \neg x_{k-1} \& \dots \& \neg x_1 \& \neg x_0 \vee \neg x_{k-1} \& \dots \& \neg x_1 \& x_0 \vee \neg x_{k-1} \& \dots \& x_1 \& \neg x_0 \vee \neg x_{k-1} \& \dots \& x_1 \& x_0 \vee \dots$

Такое представление множества (какая-либо форма задания соответствующей булевой функции) будем называть **стандартным СИМВОЛЬНЫМ**

Символьное представление графа

Отношение $E \subseteq V \times V$ перепишем как соответствующее отношение $E_{\mathbb{B}} \subseteq \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^k$

Перейдём от этого отношения к его **характеристической функции**: $(2k)$ -местной булевой функции f_E , такой что $f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 1 \Leftrightarrow (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in E$

Будем считать, что это функция над двумя комплектами переменных: x_0, \dots, x_{k-1} для первого набора (начала дуги) и x'_0, \dots, x'_{k-1} для второго (конца дуги)

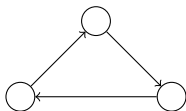
Например, дуга $(0010) \rightarrow (1011)$ может быть представлена как конъюнкция $\neg x_3 \ \& \ \neg x_2 \ \& \ x_1 \ \& \ \neg x_0 \ \& \ x'_3 \ \& \ \neg x'_2 \ \& \ x'_1 \ \& \ x'_0$

А отношение $E_{\mathbb{B}}$ можно представить как дизъюнкцию представлений дуг

Такое представление двуместных отношений (какая-либо форма задания соответствующей булевой функции над двумя комплектами переменных) будем называть **стандартным символьным**

Символьное представление графа

Например:



Закодируем вершины числами 0 (левая), 1 (верхняя) и 2 (правая)

Запишем эти числа двоично в двух битах: $(0)_2^2 = (00)$, $(1)_2^2 = (01)$, $(2)_2^2 = (10)$

Характеристическую функцию множества $\{(00), (01), (10)\}$, отвечающего вершинам, можно представить формулой

$$\neg(x_1 \& x_0)$$

Характеристическую функцию отношения

$$\{((00), (01)), ((01), (10)), ((10), (00))\},$$

отвечающего дугам, можно представить формулой

$$\neg x_1 \& \neg x_0 \& \neg x'_1 \& x'_0 \vee \neg x_1 \& x_0 \& x'_1 \& \neg x'_0 \vee x_1 \& \neg x_0 \& \neg x'_1 \& \neg x'_0$$

Символьное представление модели Крипке

Конечную модель Крипке $M = (S, S_0, \rightarrow, L)$ над множеством AP можно представить как набор следующих конечных множеств и отношений:

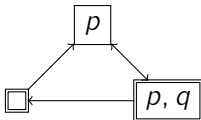
- ▶ S — конечное множество, самое большое по включению множество
- ▶ S_0 — конечное множество, $S_0 \subseteq S$
- ▶ \rightarrow — двуместное отношение, $\rightarrow \subseteq S \times S$
- ▶ Для каждого атомарного высказывания p , $p \in AP$, — множество всех вершин, в которых p истинно:

$$S_p = \{s \mid s \in S, p \in L(s)\}$$

Символьным представлением модели Крипке будем называть совокупность стандартных представлений S , S_0 , \rightarrow и S_p для каждого $p \in AP$ для заданного подходящего числа бит k

Символьное представление модели Крипке

Например ($AP = \{p, q\}$)



Пример символьного представления этой модели Крипке для нумерации состояний 0 (левое), 1 (верхнее), 2 (правое) и двух битов:

▶ Множество состояний: $\neg(x_1 \ \& \ x_0)$

▶ Множество начальных состояний: x_0

▶ Отношение переходов:

$$\neg x_1 \ \& \ (\neg x_0 \ \& \ x'_1 \ \& \ \neg x'_0 \ \vee \ \neg x_0 \ \& \ x'_1 \ \& \ x'_0) \ \vee \ x_1 \ \& \ \neg x_0 \ \& \ \neg x'_1$$

▶ Множество S_p : $x_0 \ \oplus \ x_1$

▶ Множество S_q : $x_1 \ \& \ \neg x_0$

Операции над символьными представлениями

Мало уметь записывать множества как булевы функции, обычно требуется уметь их строить и применять к ним теоретико-множественные операции

Стандартное представление \emptyset : \mathbb{f}

Стандартное представление $\{i\}$ — это элементарная конъюнкция, отвечающая i

Если φ_1 — представление множества S_1 и φ_2 — представление множества S_2 , то:

- ▶ $S_1 \cup S_2$ представляется как $\varphi_1 \vee \varphi_2$
- ▶ $S_1 \cap S_2$ представляется как $\varphi_1 \& \varphi_2$
- ▶ $S_1 \setminus S_2$ представляется как $\varphi_1 \& \neg\varphi_2$

Откуда берутся символьные представления (пример)

Чтобы развеять впечатление о том, что символьное представление модели Крипке — это «неестественная» конструкция, необходимая только в технических целях, приведём пример, когда такое представление возникает прежде «явного» (*а ещё лучше это будет заметно в обязательном задании по средству NuSMV*)

Представим себе императивную программу над переменными $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, каждая из которых принимает значения из конечного множества D (домена)

Откуда берутся символьные представления (пример)

Оценка переменных — это отображение $\xi : V \rightarrow D$, которым задаётся набор значений переменных в заданный момент времени выполнения программы

Оценку переменных ξ иногда записывают в такой форме (*табличной*):
 $[v_1/\xi(v_1), \dots, v_n/\xi(v_n)]$

Также у программы есть **счётчик команд** — особая переменная pc , принимающая значения из конечного множества D_{pc} и задающая своим значением команду, которая будет выполняться следующей

Состояниями такой программы будут элементы множества $D^n \times D_{pc}$ — например, это можно воспринимать как представление **состояния вычисления** императивной программы согласно **модели из начала этого курса**

Откуда берутся символьные представления (пример)

Каждое «элементарное» утверждение о значениях переменных и счётчике команд: $v_i = k$, $v_i = v_j$, $pc = k$ — можно трактовать как сокращение для булевой формулы, описывающей такое равенство для двоичных записей значений переменных

Например, если переменной v_2 сопоставлены переменные x_3, x_4, x_5 (от младшего бита к старшему), то выражение $v_2 = 3$ — это сокращение для формулы $\neg x_5 \& x_4 \& x_3$

Остальные («производные») соотношения между значениями переменных и счётчика команд аналогично можно считать сокращениями для соответствующих булевых формул

Оценке переменных и состоянию программы естественным образом сопоставляются конъюнкции таких выражений

Например, оценке $[v_1/2, v_2/3, v_3/5]$ соответствует формула $\varphi = (v_1 = 2) \& (v_2 = 3) \& (v_3 = 5)$, а этой оценке и значению счётчика команд 5 — формула $\varphi \& (pc = 5)$

Откуда берутся символьные представления (пример)

Если значения переменных в начале выполнения программы однозначно определены (оценкой ξ), то множество **начальных состояний** модели задаётся формулой, отвечающей оценке ξ и начальному значению счётчика команд (обычно — 0)

Если нет, то семейство допустимых оценок нередко *естественно* записывается в виде формулы (**предусловия**)

Самый простой и при этом полезный вид **атомарных высказываний** для рассматриваемой программы — это высказывания вида $v_i = k$

Множество состояний S_p , которые размечены высказыванием $p = (v_i = k)$, задаётся формулой $v_i = k$

Откуда берутся символьные представления (пример)

Множество **переходов**, определяемых для команды C **операционной семантикой**, как правило, легко выражается в виде формулы ψ_C над двумя комплектами переменных: «обычные» для текущих значений переменных и текущего значения счётчика команд, и «штрихованные» — для значений переменных и счётчика команд после выполнения C

Например, переходы для команды $x := y + 1$; программы над $\{x, y\}$ задаются формулой $(x' = y + 1) \&(y' = y) \&(pc' = pc + 1)$:

- ▶ Следующее значение переменной x — это текущее значение переменной y плюс один
- ▶ Значение переменной y не изменяется
 - ▶ **Важно!** — если вычеркнуть множитель « $y' = y$ », то это будет означать «следующее значение переменной y любым», то есть «значение y может произвольно измениться при выполнении команды»
- ▶ Управление передаётся команде со следующим номером

Откуда берутся символьные представления (пример)

Для примера рассмотрим программу $x := x + 1; y := x + y$; над переменными x, y с доменом \mathbb{B} , и условимся, что значение счётчика команд 0 указывает на первое присваивание, 1 — на второе, и 2 означает, что программа завершилась

Счётчику команд pc сопоставим булевы переменные pc_0 (младший бит) и pc_1 (старший бит)

Тогда:

▶ Множество состояний представляется формулой $\neg(pc = 3)$

▶ Множество переходов представляется формулой

$$(pc = 0) \& (x' \oplus x) \& (y' \leftrightarrow y) \& (pc' = pc + 1) \vee$$

$$(pc = 1) \& (x' \leftrightarrow x) \& (y' \leftrightarrow (x \oplus y)) \& (pc' = pc + 1) \vee$$

$$(pc = 2) \& (x' \leftrightarrow x) \& (y' \leftrightarrow y) \& (pc' = pc)$$

▶ Утверждения о значениях pc «раскодируются» так:

$$(pc = 0) \sim (\neg pc_1 \& \neg pc_0) \quad (pc = 1) \sim (\neg pc_1 \& pc_0)$$

$$(pc = 2) \sim (pc_1 \& \neg pc_0) \quad (pc = 3) \sim (pc_1 \& pc_0)$$

$$(pc' = pc) \sim ((pc_1 \leftrightarrow pc'_1) \& (pc_0 \leftrightarrow pc'_0))$$

$$(pc' = pc + 1) \sim ((pc'_1 \leftrightarrow (pc_1 \oplus pc_0)) \& (pc'_0 \oplus pc_0))$$

Откуда берутся символьные представления (пример)

Для самостоятельного размышления: а как выглядят формулы, задающие семантику **всех** команд императивных программ из блока 2 для «естественной» арифметики с переполнением?

(Это не очень сложно, но полезно)