

Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 25

Двоичные решающие диаграммы:
BDD, OBDD, ROBDD

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Вступление

Двоичная решающая диаграмма (Binary Decision Diagram; **BDD**) — это один из наиболее популярных способов эффективного представления булевых функций для таких задач, в которых удаётся символично представить основные структуры данных решения

Существует несколько широко применяющихся русских вариантов названия этой структуры данных:

- ▶ Вместо «двоичная» иногда пишут «бинарная»
- ▶ Вместо «решающая диаграмма» иногда пишут «разрешающая диаграмма» или «диаграмма решений»

Вступление

Символьные представления нередко основываются на BDD или аналогичных структурах, и поэтому считается, что для более полного понимания тонкостей эффективной работы с символьными представлениями следует иметь общие знания об устройстве BDD

В эти знания входит *как минимум* то,

- ▶ как устроены BDD (синтаксис) и какие булевы функции ими реализуются (семантика)
- ▶ как строить BDD по другим представлениям (например, формулам)
- ▶ какие операции можно выполнять над BDD и как устроены соответствующие алгоритмы

BDD: синтаксис

Двоичная решающая диаграмма над упорядоченным набором переменных x_1, \dots, x_n — это конечный ациклический ориентированный граф, устроенный так

Вершины BDD обычно называют **узлами**

Особо выделены два **терминальных узла**: 0 и 1 — а остальные узлы называются **внутренними**

Каждый внутренний узел v помечен одной из переменных ($var(v)$)

Из каждого внутреннего узла исходят ровно две дуги, одна помечена символом 0 ($\xrightarrow{0}$), другая — символом 1 ($\xrightarrow{1}$)

Из терминального узла не исходит ни одной дуги

Узел, в который из v ведёт дуга \xrightarrow{b} , будем обозначать записью $v[b]$

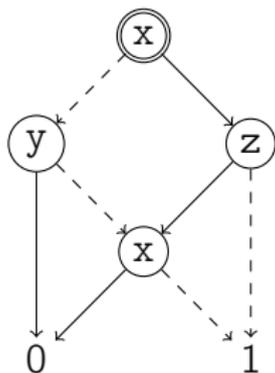
Узлы $v[0]$ и $v[1]$ будем называть соответственно **младшим потомком** ($low(v)$) и **старшим потомком** ($high(v)$) узла v

Дуги $\xrightarrow{1}$ и $\xrightarrow{0}$ также будем изображать соответственно как сплошную и пунктирную стрелки без помечающих чисел

Один (и только один) из узлов BDD объявлен **корнем**

BDD: синтаксис

Пример



Корень BDD изображён двойным контуром

Для узла (y) верно следующее:

- ▶ $high(v) = v[1] = 0$
- ▶ $var(low(v)) = var(v[0]) = x$

BDD: семантика

Каждому узлу v BDD \mathcal{D} над переменными x_1, \dots, x_n сопоставим n -местную булеву формулу $\Phi_v^{\mathcal{D}}$:

- ▶ $\Phi_0^{\mathcal{D}} = 0$
- ▶ $\Phi_1^{\mathcal{D}} = 1$
- ▶ Для внутреннего узла v : $\Phi_v^{\mathcal{D}} = \neg \text{var}(v) \& \Phi_{\text{low}(v)}^{\mathcal{D}} \vee \text{var}(v) \& \Phi_{\text{high}(v)}^{\mathcal{D}}$

В узле v BDD \mathcal{D} над переменными x_1, \dots, x_n реализуется n -местная булева функция $f_v^{\mathcal{D}}$ — это функция, реализуемая формулой $\Phi_v^{\mathcal{D}}$

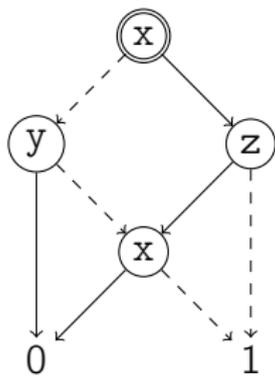
BDD \mathcal{D} реализует булеву функцию $f^{\mathcal{D}}$, реализуемую в её корне

Альтернативный способ определения значения $f^{\mathcal{D}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (значения \mathcal{D} на оценке переменных $\xi = [x_1/\alpha_1, \dots, x_n/\alpha_n]$):

- ▶ Обойдём BDD как граф, начав в корне
- ▶ Если текущий узел v — внутренний, то следующим обходится узел $v[\xi(\text{var}(v))]$
- ▶ Если обход достиг узла 0 или 1, то этот достигнутый узел объявляется значением $f^{\mathcal{D}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

BDD: семантика

Пример диаграммы \mathcal{D} :



Пронумеруем внутренние узлы так: верхний, левый, правый, нижний — v_0, v_1, v_2, v_3

$$\Phi_{v_3}^{\mathcal{D}} = \neg x \& 1 \vee x \& 0 \sim \neg x$$

$$\Phi_{v_2}^{\mathcal{D}} = \neg z \& 1 \vee z \& \Phi_{v_3}^{\mathcal{D}} \sim \neg z \vee \neg x$$

$$\Phi_{v_1}^{\mathcal{D}} = \neg y \& \Phi_{v_3}^{\mathcal{D}} \vee y \& 0 \sim \neg y \& \neg x$$

$$\Phi_{v_0}^{\mathcal{D}} = \neg x \& \Phi_{v_1}^{\mathcal{D}} \vee x \& \Phi_{v_2}^{\mathcal{D}} \sim \neg x \& \neg y \vee x \& \neg z$$

То есть диаграммой \mathcal{D} реализуется та же функция, что и формулой $\Phi_{v_0}^{\mathcal{D}}$

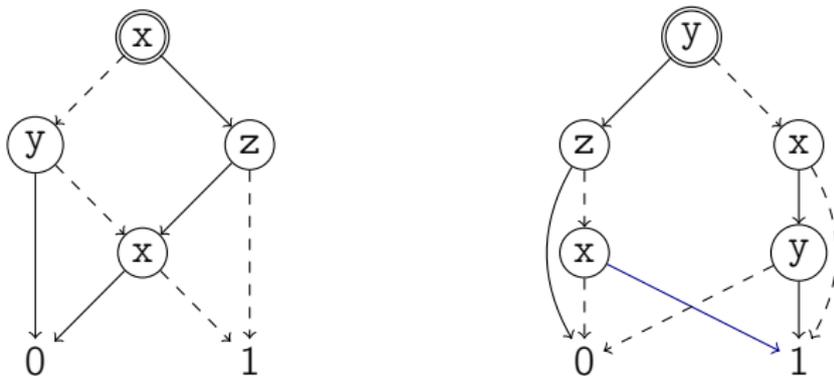
Это подтверждает и обход на оценке $[x/1, y/0, z/1]$: $\textcircled{x} \xrightarrow{1} \textcircled{z} \xrightarrow{1} \textcircled{x} \xrightarrow{1} 0$

BDD: семантика

BDD \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 (а также BDD \mathcal{D} и формула φ) над переменными x_1, \dots, x_n называются **эквивалентными** ($\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$; $\mathcal{D} \sim \varphi$), если ими реализуются одинаковые функции над этим набором переменных

Существенная часть применения BDD — это проверка их эквивалентности, и способ такой проверки неочевиден: одна и та же функция может быть реализована существенно разными по структуре диаграммами

Например, такие две BDD эквивалентны:

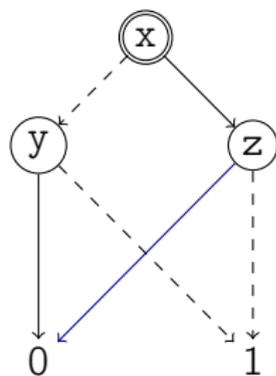
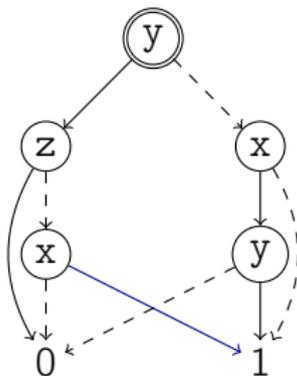
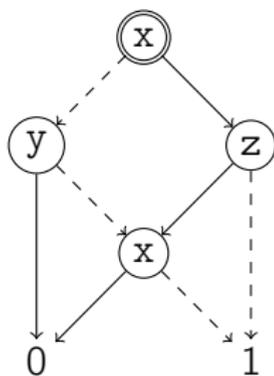


OBDD

Один из факторов, влияющих на трудность проверки эквивалентности BDD — это возможность записывать переменные в узлах «хаотично»

BDD \mathcal{D} над набором переменных x_1, \dots, x_n называется **упорядоченной** (Ordered BDD; **OBDD**), если для любой дуги $v \rightarrow w$, ведущей во внутренний узел, верно $var(v) < var(w)$ для естественного порядка $<$ переменных: $x_i < x_j \Leftrightarrow i < j$

Например, среди изображённых ниже эквивалентных BDD над набором переменных x, y, z только самая правая упорядочена (является OBDD)

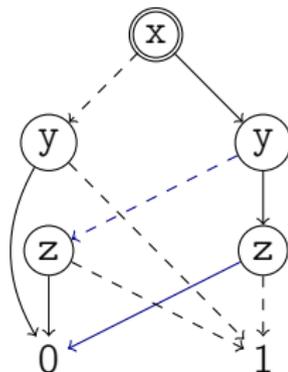
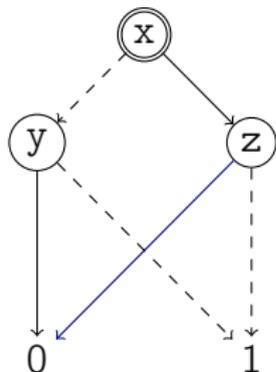


ROBDD

Для практических целей хотелось бы иметь **каноническое** представление булевых функций решающими диаграммами: единственное, и при этом такое, с которым было бы достаточно удобно работать (строить и преобразовывать)

OBDD не могут быть использованы в этом качестве: эквивалентные OBDD могут иметь заметно разную структуру

Например, следующие две OBDD над x, y, z эквивалентны, но имеют различное число узлов и хотя и не очень сильно, но всё же заметно различный внешний вид

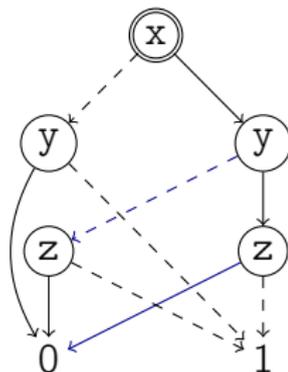
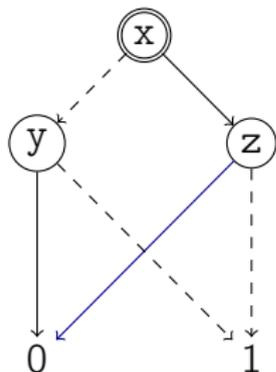


ROBDD

OBDD называется **приведённой** (или **сокращённой**, или **редуцированной**; Reduced OBDD; **ROBDD**), если для неё выполнены два условия:

1. Все внутренние узлы достижимы из корня
2. В любой паре различных узлов реализуются различные функции

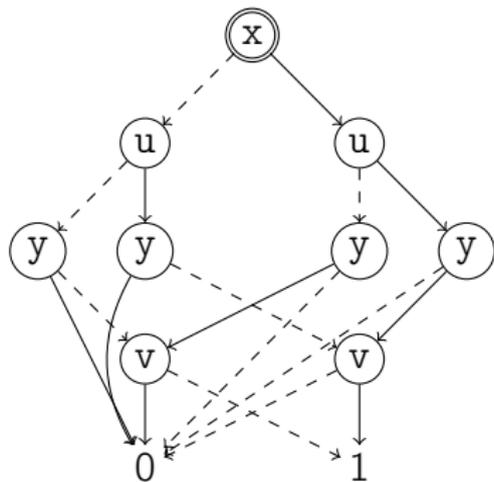
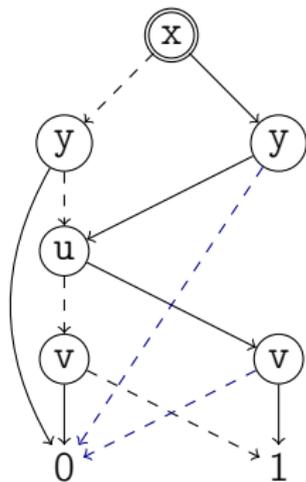
Например, среди изображённых ниже OBDD над x, y, z левая является приведённой, а правая — нет



ROBDD

При использовании ROBDD очень важную роль играет выбор порядка переменных, над которой строится BDD

Например, ROBDD, эквивалентная формуле $(x \leftrightarrow y) \& (u \leftrightarrow v)$ для порядка $x < y < u < v$ имеет заметно меньше узлов, чем для порядка $x < u < y < v$:



ROBDD

Так как BDD обсуждаются только как вспомогательный инструмент, основные их свойства и алгоритмы будут приводиться без обоснования

Утверждение. Если ROBDD D_1 и D_2 над общим набором переменных эквивалентны, то они изоморфны как размеченные графы

Изоморфизм ROBDD проверить несложно:

- ▶ В изоморфизм ϕ (как двуместное отношение на вершинах) входит пара корней диаграмм
- ▶ Если $(v, w) \in \phi$, то и $(low(v), low(w)), (high(v), high(w)) \in \phi$
- ▶ Используя два предыдущих пункта, можно вычислить множество всех пар узлов, которые обязаны входить в изоморфизм ϕ
- ▶ Диаграммы изоморфны \Leftrightarrow в каждой паре $(v, w) \in \phi$
 - ▶ либо оба узла внутренние и $var(v) = var(w)$,
 - ▶ либо оба узла терминальные и $v = w$

Чтобы ROBDD были «полезным» представлением булевых функций, кроме простоты проверки равенства реализуемых функций необходимо уметь эффективно строить и преобразовывать диаграммы

ROBDD: приведение OBDD

Дано: OBDD \mathcal{D} над x_1, \dots, x_n

Требуется построить ROBDD \mathcal{D}^* над x_1, \dots, x_n , эквивалентную \mathcal{D}

Алгоритм устроен несложно — пока это возможно, выполнять следующие три преобразования:

1. Если в диаграмме есть внутренний узел v , отличный от корня и не имеющий ни одной входящей дуги, то удалить v и исходящие дуги
2. Если в диаграмме есть внутренний узел v , такой что $low(v) = high(v)$, то удалить v и перенаправить все дуги, входившие в v , в $low(v)$; если v был корнем, то объявить $low(v)$ корнем
3. Если в диаграмме есть различные внутренние узлы v, w , такие что $var(v) = var(w)$, $low(v) = low(w)$, $high(v) = high(w)$ и w не корень, то удалить узел w и перенаправить все дуги, входившие в w , в v

ROBDD: простейшие диаграммы

\mathcal{D}^φ — так обозначим ROBDD, эквивалентную формуле φ

ROBDD для простейших функций устроены очень просто

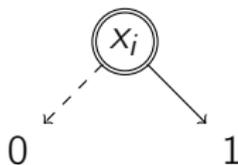
\mathcal{D}^0 :



\mathcal{D}^1 :



\mathcal{D}^{x_i} :



ROBDD: отрицание

Дано: ROBDD \mathcal{D}^φ над x_1, \dots, x_n

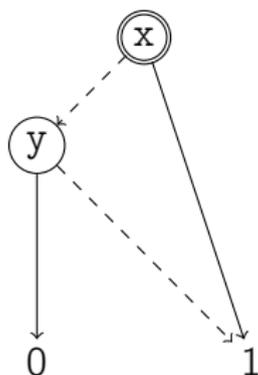
Требуется построить ROBDD $\neg \mathcal{D}^\varphi = \mathcal{D}^{\neg\varphi}$ над x_1, \dots, x_n

Алгоритм устроен несложно:

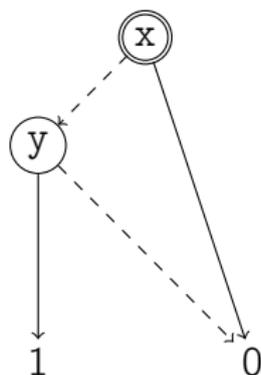
1. Поменять местами терминальные узлы

Пример

$\mathcal{D}^{x \vee \neg y}$:



$\neg \mathcal{D}^{x \vee \neg y}$:



ROBDD: подстановка константы

$\varphi[x/e]$ — формула, получающаяся из φ подстановкой выражения e на место каждого вхождения переменной x

Дано: ROBDD \mathcal{D}^φ над x_1, \dots, x_n , значение $b \in \{0, 1\}$

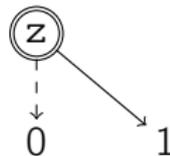
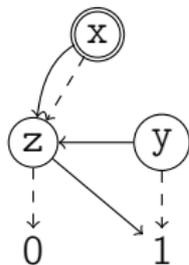
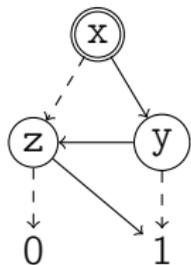
Требуется построить ROBDD $\mathcal{D}^\varphi[x/b] = \mathcal{D}^{\varphi[x/b]}$ над x_1, \dots, x_n

Алгоритм и тут устроен несложно:

1. Для каждого узла v , такого что $\text{var}(v) = x$, перенаправить входящие дуги в узел $v[b]$
2. Привести получившуюся OBDD

Пример ($\varphi = z \& (\neg x \vee y) \vee x \& \neg y$)

\mathcal{D}^φ : OBDD $\mathcal{D} \sim \varphi[y/1]$: $\mathcal{D}^\varphi[y/1]$:



ROBDD: применение двуместной операции

Дано: ROBDD \mathcal{D}^φ , \mathcal{D}^ψ над x_1, \dots, x_n , двуместная булева операция \circ

Требуется построить ROBDD $\mathcal{D}^\varphi \circ \mathcal{D}^\psi = \mathcal{D}^{\varphi \circ \psi}$ над x_1, \dots, x_n

Алгоритм устроен сложнее всех предыдущих, но тоже достаточно просто:

- ▶ Если $n = 0$, то обе формулы φ , ψ — это константы 0, 1, и результат — простейшая диаграмма $\mathcal{D}^{\varphi \circ \psi}$
- ▶ Иначе:
 - ▶ Рекурсивно построить диаграммы $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}^\varphi[x_1/0] \circ \mathcal{D}^\psi[x_1/0]$ и $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}^\varphi[x_1/1] \circ \mathcal{D}^\psi[x_1/1]$ над x_2, \dots, x_n
 - ▶ Объединить \mathcal{D}_0 и \mathcal{D}_1 , считая все внутренние узлы попарно различными, добавить узел x_1 , объявить его корнем и направить из него дуги $\xrightarrow{0}$, $\xrightarrow{1}$ в бывшие корни диаграмм \mathcal{D}_0 , \mathcal{D}_1 соответственно
 - ▶ Привести полученную OBDD

А почему это работает?

ROBDD: построение по формуле

Формулу φ над \neg и двуместными операциями можно трактовать как схему применения операций к функциям, реализуемым простейшими формулами $0, 1, x_i$

Диаграмму \mathcal{D}^φ можно получить как результат применения операций согласно той же схеме к соответствующим простейшим диаграммам $\mathcal{D}^0, \mathcal{D}^1, \mathcal{D}^{x_i}$

Например, $\mathcal{D}^{x \& \neg y \vee z} = \mathcal{D}^x \& \neg \mathcal{D}^y \vee \mathcal{D}^z$

ROBDD: производные операции

На практике к ROBDD применяются и другие удобные «производные» операции:

- ▶ Для формулы φ : $\exists x \varphi = \varphi[x/0] \vee \varphi[x/1]$
Для диаграммы: $\exists x \mathcal{D}^\varphi = \mathcal{D}^{\exists x \varphi}$
- ▶ Для формулы φ : $\forall x \varphi = \varphi[x/0] \& \varphi[x/1]$
Для диаграммы: $\forall x \mathcal{D}^\varphi = \mathcal{D}^{\forall x \varphi}$
- ▶ Для формулы φ : $relprod(\varphi, \psi, y_1, \dots, y_k) = \exists y_1 \dots \exists y_k (\varphi \& \psi)$
Для диаграммы: $relprod(\mathcal{D}^\varphi, \mathcal{D}^\psi, y_1, \dots, y_k) = \mathcal{D}^{relprod(\varphi, \psi, y_1, \dots, y_k)}$
 - ▶ Пусть формулой φ задаётся двуместное отношение R_1 над комплектами переменных \tilde{x} и \tilde{y} , а формулой ψ — одноместное отношение R_2 над комплектом \tilde{y} или двуместное над \tilde{y} и \tilde{z}
Тогда $relprod(\varphi, \psi, \tilde{y})$ задаёт отношение
 - ▶ $\exists \tilde{y}(R_1(\tilde{x}, \tilde{y}) \& R_2(\tilde{y}))$: множество всех \tilde{x} , входящих в отношение R_1 с хотя бы одним \tilde{y} из R_2 — или
 - ▶ $\exists \tilde{y}(R_1(\tilde{x}, \tilde{y}) \& R_2(\tilde{y}, \tilde{z}))$: множество всех пар (\tilde{x}, \tilde{z}) , соединяющихся посредством R_1 и R_2 через хотя бы один \tilde{y}

ROBDD: производные операции

Задача **QBF** (выполнимости квантифицированных булевых формул): для заданной произвольной формулы вида $Q_1x_1 \dots Q_nx_n(\varphi)$, где $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ и φ — КНФ над x_1, \dots, x_n , проверить соотношение $Q_1x_1 \dots Q_nx_n(\varphi) \neq 0$. Эта задача **весьма трудна**: является PSPACE-полной.

Но её можно решить при помощи малого числа операций над BDD:

- ▶ Построить ROBDD по заданной формуле (с кванторами)
- ▶ Проверить изоморфизм полученной BDD и \mathcal{D}^0

Сложность работы с ROBDD «скрыта» в возрастании их размера при применении операций:

- ▶ При применении одной операции размер возрастает несильно (*полиномиально с низкой степенью*)
- ▶ При многократном применении операций размер может возрастать весьма существенно

Но хотя использование ROBDD и неэффективно в теории, оно всё же считается эффективным на практике: при должном выборе порядка переменных нередко получаются достаточно компактные диаграммы