Лекция 5. Предикаты. Классы функций, сохраняющих предикат, их замкнутость. Предполные классы. Предикатное описание предполных классов.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Замкнутый класс

Множество A, $A \subseteq P_k$, называется **замкнутым классом**, если $[A] = A$.

Предикат

Отображение $\rho : E_k^m \to \{0,1\}$ называется *m*-местным **предикатом** на множестве E_k.

Пусть $R_k^{(m)}$ обозначает множество всех *m*-местных предикатов на E_k, и $R_k = \bigcup_{m \geqslant 1} R_k^{(m)}$.

Предикаты

Пусть $\rho \in R_k^{(m)}$, и пусть $\beta_1, \ldots, \beta_l$ — все наборы из E_k^m, на которых предикат ρ равен единице.

Предикат ρ можно записывать матрицей размера $m \times l$, в которой столбцами являются наборы $\beta_1, \ldots, \beta_l$, записанные сверху вниз:

$$\rho = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_l \end{array} \right)$$

Предикаты

Пример. Пусть $\rho \in R_3^{(1)}$, где

x	ρ
0	1
1	1
2	0

Тогда предикат ρ можно записать следующей матрицей:

$$\rho = (0, 1).$$

Предикаты

Пример. Пусть $\rho \in R_3^{(2)}$, где

$x \setminus y$	0	1	2
0	1	1	0
1	1	1	0
2	0	0	1

Тогда предикат ρ можно записать следующей матрицей:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Сохранение функцией предиката

Функция $f \in P_k^{(n)}$ сохраняет предикат $\rho \in R_k^{(m)}$, если для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in E_k^n$ из $\rho(\alpha_{1,j}, \ldots, \alpha_{m,j})$ для всех $j = 1, \ldots, n$ следует $\rho(f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_m))$:

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & & \rho & \rho & & \rho & & \rho \\
\alpha_1 = (& & \alpha_{1,1}, & \alpha_{1,2}, & \ldots, & \alpha_{1,n} &) & f(\alpha_1) \\
\alpha_2 = (& & \alpha_{2,1}, & \alpha_{2,2}, & \ldots, & \alpha_{2,n} &) & f(\alpha_2) \\
 & & & & \ldots, & & & \\
\alpha_m = (& & \alpha_{m,1}, & \alpha_{m,2}, & \ldots, & \alpha_{m,n} &) & f(\alpha_m)
\end{array}
$$

Сохранение функцией предиката

Введем сокращение записи: если $\rho \in R_k^{(m)}$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in E_k^n$, то будем писать $\rho(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ при выполнении условий $\rho(\alpha_{1,j}, \ldots, \alpha_{m,j})$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

Тогда определение сохранения функцией предиката можно переписать следующим образом.

Функция $f \in P_k^{(n)}$ сохраняет предикат $\rho \in R_k^{(m)}$, если для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in E_k^n$ из $\rho(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ следует $\rho(f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_m))$.

Сохранение функцией предиката

Пример. Пусть $\rho \in R_3^{(1)}$, где $\rho = (0, 1)$.

Тогда функция $f_1(x) = x^2 \in P_3$ сохраняет предикат ρ, т. к.

$$\rho(0) = 1 \Rightarrow \rho(0^2) = 1, \quad \rho(1) = 1 \Rightarrow \rho(1^2) = 1.$$

Функция $f_2(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2 \in P_3$ также сохраняет предикат ρ, т. к.

$$\begin{array}{ll} \rho(0) = \rho(0) = 1 \Rightarrow \rho(0 \dot{-} 0) = 1, & \rho(0) = \rho(1) = 1 \Rightarrow \rho(0 \dot{-} 1) = 1, \\ \rho(1) = \rho(0) = 1 \Rightarrow \rho(1 \dot{-} 0) = 1, & \rho(1) = \rho(1) = 1 \Rightarrow \rho(1 \dot{-} 1) = 1. \end{array}$$

А функция $f_3(x) = 2 \cdot x \in P_3$ не сохраняет предикат ρ, т. к.

$$\rho(1) = 1, \text{ но } \rho(2 \cdot 1) = \rho(2) = 0.$$

Сохранение функцией предиката

Пример. Пусть $\rho \in R_3^{(2)}$, где

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Функция $f_1(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2) \in P_3$ сохраняет предикат ρ (можно проверить перебором).

А функция $f_2(x) = x_1 + x_2 \in P_3$ не сохраняет предикат ρ, т. к.

$$\begin{array}{cccc} & \rho & \rho & & \bar{\rho} \\ (& 0 & 2 &) & 0 + 2 = 2 \\ (& 1 & 2 &) & 1 + 2 = 0 \end{array}$$

Полиморфизмы и инварианты

Если функция $f \in P_k$ сохраняет предикат $\rho \in R_k$, то предикат ρ называется **инвариантным** относительно функции f, а функция f называется **полиморфизмом** предиката ρ.

Множество всех полиморфизмов предиката $\rho \in R_k$ обозначается $\mathrm{Pol}(\rho)$.

Замкнутость множества полиморфизмов предиката

Предложение 1. *Если* $\rho \in R_k$, *то* $\mathrm{Pol}(\rho)$ *— замкнутый класс.*

Доказательство. Пусть $\rho \in R_k^{(m)}$. Заметим, что $I_k \subseteq \mathrm{Pol}(\rho)$. Пусть $f_0(y_1, \ldots, y_t) \in \mathrm{Pol}(\rho)$, и $f_i(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Pol}(\rho)$, где $i = 1, \ldots, t$.

Рассмотрим функцию
$f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_t(x_1, \ldots, x_n))$.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in E_k^n$ и $\rho(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 1$. Тогда:

α_i	$f_1(\alpha_i)$	$f_2(\alpha_i)$	$\ldots$	$f_t(\alpha_i)$	$f_0(\beta_i)$
α_1	$\beta_{1,1}$	$\beta_{1,2}$	$\ldots$	$\beta_{1,t}$	$f_0(\beta_1)$
α_2	$\beta_{2,1}$	$\beta_{2,2}$	$\ldots$	$\beta_{2,t}$	$f_0(\beta_2)$
$\ldots$			$\ldots$		
α_m	$\beta_{m,1}$	$\beta_{m,2}$	$\ldots$	$\beta_{m,t}$	$f_0(\beta_m)$

Значит, $f \in \mathrm{Pol}(\rho)$. $\square$

Неполнота системы $\{0, 1, \ldots, k-1, x \cdot y\}$ в P_k

Пример. Докажем, что $A = \{0, 1, \ldots, k-1, x \cdot y\}$ — неполная система в P_k при простых k. Ясно, что при составных k эта система не полна, т. к. $A \subseteq Polyn_k$.

Рассмотрим двухместный предикат $\rho \in R_k^{(2)}$: $\rho(x, y) = 1$, если $x = 0$ или $y = 0$, или $x = y$, в остальных случаях $\rho(x, y) = 0$. Тогда при $k \geqslant 3$ получаем $\rho(x, y) \neq 1$.

Отметим, что $A \subseteq \mathrm{Pol}(\rho)$. Но $x + y \notin \mathrm{Pol}(\rho)$, т. к.

$$\rho(0, 1) = \rho(2, 0) = 1, \text{ но } \rho(0 + 2, 1 + 0) = \rho(2, 1) = 0.$$

Значит, $\mathrm{Pol}(\rho) \neq P_k$. Получаем:

$$[A] \subseteq [\mathrm{Pol}(\rho)] = \mathrm{Pol}(\rho) \neq P_k.$$

Т. е. при простых $k \geqslant 3$ система A не полна в P_k.

При $k = 2$ система $A = \{0, 1, x \cdot y\} \subseteq M$ не полна в P_2.

Классы функций, сохраняющих множество

Если $E \subseteq E_k$, то $T_k(E) = \mathrm{Pol}(\rho_E)$, где ρ_E — такой одноместный предикат на E_k, что $\rho_E(a) = 1$ в том и только в том случае, когда $a \in E$.

Значит, $T_k(E)$ — замкнутый класс.

Классы функций, сохраняющих разбиение

Если D — разбиение множества E_k, то $U_k(D) = \mathrm{Pol}(\rho_D)$, где ρ_D — такой двухместный предикат на E_k, что $\rho_D(a, b) = 1$ в том и только в том случае, когда $a \sim_D b$.

Значит, $U_k(D)$ — замкнутый класс.

Предполные классы

Каждый предполный класс из $M_1, \dots, M_{s(k)}$ в P_k, $k \geqslant 2$, можно описать как множество всех полиморфизмов некоторого предиката, т. е. $M_j = \mathrm{Pol}(\rho_j)$ для некоторого $\rho_j \in R_k$.

Основной предикат замкнутого класса

Пусть $k \geqslant 2$, $A \subseteq P_k$ и A — замкнутый класс, который содержит **не все** функции одной переменной из P_k (т. е. $A \cap P_k^{(1)} \neq P_k^{(1)}$).

Основным предикатом класса A назовем такой предикат $\rho_A \in R_k^{(k)}$, что для любого набора $\alpha \in E_k^k$ выполняется:

1) $\rho_A(\alpha) = 1$, если $\alpha = (h(0), h(1), \dots, h(k-1))$ для некоторой функции $h \in A \cap P_k^{(1)}$, и
2) $\rho_A(\alpha) = 0$ иначе.

Пример. Рассмотрим $T_0 \subseteq P_2$. Тогда $T_0 \cap P_2^{(1)} = \{0, x\}$. Поэтому

$$\rho_{T_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Предполные классы

Теорема 1. *Пусть $k \geqslant 2$, $A \subseteq P_k$ — замкнутый класс и $A \cap P_k^{(1)} \neq P_k^{(1)}$. Тогда*

1) $A \subseteq \mathrm{Pol}(\rho_A)$;
2) *если A — предполный класс, то $A = \mathrm{Pol}(\rho_A)$.*

Предполные классы

Доказательство. 1. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$.
Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in E_k^n$ и $\rho_A(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) = 1$.
Значит, найдутся такие функции $h_1, \ldots, h_n \in A \cap P_k^{(1)}$, что

$$\alpha_i = (h_1(i), h_2(i), \ldots, h_n(i))$$

для всех $i \in E_k$. Пусть $h(x) = f(h_1(x), \ldots, h_n(x)) \in A \cap P_k^{(1)}$.

Тогда:

$$\begin{array}{rll} f(\alpha_0) = & f(h_1(0), h_2(0), \ldots, h_n(0)) & = h(0), \\ f(\alpha_1) = & f(h_1(1), h_2(1), \ldots, h_n(1)) & = h(1), \\ & \ldots, & \\ f(\alpha_{k-1}) = & f(h_1(k-1), h_2(k-1), \ldots, h_n(k-1)) & = h(k-1). \end{array}$$

Получаем:

$$\rho_A(f(\alpha_0), f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_{k-1})) = \rho_A(h(0), h(1), \ldots, h(k-1)) = 1.$$

Значит, $f \in \mathrm{Pol}(\rho_A)$, т. е. $A \subseteq \mathrm{Pol}(\rho_A)$.

Предполные классы

Доказательство. 2. Пусть теперь A — предполный класс. Т. к. $x \in A$, получаем $\rho_A(0, 1, \ldots, k-1) = 1$.

Рассмотрим $g(x) \notin A$. Тогда $\rho_A(0, 1, \ldots, k-1) = 1$, но

$$\rho_A(g(0), g(1), \ldots, g(k-1)) = 0,$$

т. к. $g \notin A$. Значит, $g \notin \mathrm{Pol}(\rho_A)$ и $\mathrm{Pol}(\rho_A) \neq P_k$.

Из п. 1 получаем:

$$A \subseteq \mathrm{Pol}(\rho_A) \neq P_k.$$

Значит, $A = \mathrm{Pol}(\rho_A)$. $\square$

Предполные классы в P_2

В P_2 пять предполных классов T_0, T_1, L, S, M.

A	$A \cap P_2^{(1)}$
T_0	$0, x$
T_1	$1, x$
L	$0, 1, x, \bar{x} = x \oplus 1$
S	$x, \bar{x}$
M	$0, 1, x$

Предполный класс T_0 в P_2

Рассмотрим $T_0 \subseteq P_2$. Тогда $T_0 \cap P_2^{(1)} = \{0, x\}$. Поэтому

$$T_0 = \mathrm{Pol}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Предполный класс T_1 в P_2

Рассмотрим $T_1 \subseteq P_2$. Тогда $T_1 \cap P_2^{(1)} = \{x, 1\}$. Поэтому

$$T_1 = \mathrm{Pol}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Предполный класс S в P_2

Рассмотрим $S \subseteq P_2$. Тогда $S \cap P_2^{(1)} = \{x, \bar{x}\}$. Поэтому

$$S = \mathrm{Pol}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Предполный класс M в P_2

Рассмотрим $M \subseteq P_2$. Тогда $M \cap P_2^{(1)} = \{0, x, 1\}$. Поэтому

$$M = \mathrm{Pol}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Предполные классы в P_2

Значит, получаем:

$A \subseteq P_2$	$\rho_A \in R_2^{(2)}$
T_0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
T_1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
S	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
M	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Предикат τ_k

Пусть $\tau_k \in R_k^{(k)}$, $k \geqslant 3$, — такой предикат, что для любого набора $\alpha \in E_k^k$ выполняется:

1) $\tau_k(\alpha) = 1$, если в наборе α найдутся хотя бы два совпадающие разряда, и
2) $\tau_k(\alpha) = 0$ иначе.

Пример. Рассмотрим $k = 3$. Тогда предикат $\tau_3 \in R_3^{(3)}$ равен 0 в точности на следующих наборах из E_3^3:

$$\begin{array}{ccc} (0,1,2), & (0,2,1), & (1,0,2), \\ (1,2,1), & (2,0,1), & (2,1,0). \end{array}$$

На всех остальных наборах из E_3^3 предикат τ_3 равен 1.

Основной предикат замкнутого класса

Пусть $k \geqslant 3$, $A \subseteq P_k$ и A — замкнутый класс, который содержит **все** функции одной переменной из P_k (т. е. $A \cap P_k^{(1)} = P_k^{(1)}$), и $A \neq P_k$.

Основным предикатом класса A назовем предикат $\tau_k \in R_k^{(k)}$.

Предполные классы

Теорема 2. *Пусть $k \geqslant 3$, $A \subseteq P_k$ — замкнутый класс, $A \neq P_k$ и $A \cap P_k^{(1)} = P_k^{(1)}$. Тогда*

1) $A \subseteq \mathrm{Pol}(\tau_k)$;
2) *если A — предполный класс, то $A = \mathrm{Pol}(\tau_k)$.*

Предполные классы

Доказательство. 1. 1) Пусть $f(x) \in P_k^{(1)}$. Пусть $\alpha \in E_k^k$ и $\tau_k(\alpha) = 1$. Значит, $\alpha_i = \alpha_j$ для некоторых $1 \leqslant i < j \leqslant k$. Тогда

$$\tau_k(f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_k)) = 1,$$

т. к. $f(\alpha_i) = f(\alpha_j)$.

2) Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in A$ — существенная функция. Тогда f принимает не более $(k-1)$ значений, т. к. иначе по критерию Слупецкого $A = [A] = P_k$, что не так.
Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in E_k^n$ и $\tau_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 1$.
Тогда в наборе $(f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_k)) = \beta \in E_k^k$ найдутся хотя бы два совпадающие разряда, т. к. f принимает не более $(k-1)$ различных значений, а в наборе β — k разрядов. Т. е. $\tau_k(\beta) = 1$.

Значит, в обоих случаях $f \in \mathrm{Pol}(\tau_k)$, поэтому $A \subseteq \mathrm{Pol}(\tau_k)$.

Предполные классы

Доказательство. 2. Пусть теперь A — предполный класс.

Пусть $g(x_1, \ldots, x_m) \in P_k$ — произвольная существенная функция, принимающая все k значений. Тогда $g \notin A$.

По основной лемме для существенной функции g найдутся такие k наборов $\delta_1, \ldots, \delta_k \in E_k^n$, что
1) $|G_j| \leqslant k-1$, где $G_j = \{\delta_{1,j}, \ldots, \delta_{k,j}\}$, $j = 1, \ldots, n$;
2) на наборах $\delta_1, \ldots, \delta_k$ функция g принимает k различных значений $0, 1, \ldots, k-1$.

По построению $\tau_k(\delta_1, \ldots, \delta_k) = 1$.

Но

$$\tau_k(f(\delta_1), \ldots, f(\delta_k)) = \tau_k(0, 1, \ldots, k-1) = 0.$$

Значит, $g \notin \mathrm{Pol}(\tau_k)$ и $\mathrm{Pol}(\tau_k) \neq P_k$.

Предполные классы

Из п. 1 получаем:

$$A \subseteq \mathrm{Pol}(\tau_k) \neq P_k.$$

Значит, $A = \mathrm{Pol}(\tau_k)$. □

Класс Слупецкого в P_k

В P_k при $k \geqslant 3$ рассмотрим замкнутый класс A, состоящий в точности из

1) **всех** функций одной переменной и

2) **всех** функций любого числа переменных, принмающих не более $(k-1)$ различных значений.

Он называется **класс Слупецкого**.

Предполный класс Слупецкого в P_k

Предложение 2. *Класс Слупецкого является предполным классом в P_k при $k \geqslant 3$.*

Доказательство.
1. $[A] = A \neq P_k$, т. е. A — неполная система в P_k.

2. Если $f \notin A$, то f — существенная функция, принимающая все k значений.
Тогда по критерию Слупецкого $[A \cup \{f\}] = P_k$, т. е. при добавлении к множеству A любой не принадлежащей ему функции получается полная система.

Т. е. A — предполный класс. $\square$

Теорема Кузнецова

Теорема 3 (А. В. Кузнецова). *Пусть* $k \geqslant 3$. *Если* A *— предполный класс в* P_k, *то*
1) *при* $A \cap P_k^{(1)} \neq P_k^{(1)}$ *выполняется* $A = \mathrm{Pol}(\rho_A)$;
2) *при* $A \cap P_k^{(1)} = P_k^{(1)}$ *выполняется* $A = \mathrm{Pol}(\tau_k)$, *и в этом случае* A *— предполный класс Слупецкого.*

Доказательство. Теорема следует из теорем 1 и 2 и утверждения 2. $\square$

Литература к лекции

1. Марченков С.С. Основы теории булевых функций. М.: Физматлит, 2014. Гл. IV, с. 66–82.

2. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Набебин А.А. Предполные классы в многозначных логиках. М.: МЭИ, 1997. С. 24–26.

3. Lau D. Function Algebras on Finite Sets. Springer, 2006. P. 125–126, 130–131.