Алфавитное кодирование. Алгоритм распознавания однозначности алфавитного кодирования.

Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Кодирование

Пусть заданы два конечных алфавита A и B.

Алфавит A назовем **исходным**, алфавит B — **кодирующим**.

Кодированием (из A в B) называется произвольное отображение

$$\varphi : A^* \to B^*.$$

Разделимость кодирования

Кодирование $\varphi : A^* \to B^*$ называется **однозначным** (или **разделимым**), если для любых слов $\alpha_1, \alpha_2 \in A^*$ из $\alpha_1 \neq \alpha_2$ следует $\varphi(\alpha_1) \neq \varphi(\alpha_2)$.

Т. е. кодирование φ — разделимо, если оно разным сообщениям сопоставляет различные коды.

Другими словами, кодирование φ — однозначно, если любое слово $\beta \in B^*$ является кодом не более одного сообщения.

Алфавитное кодирование

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ — исходный алфавит,
$B = \{b_1, \ldots, b_q\}$ — кодирующий алфавит.

Кодирование $\varphi : A^* \to B^*$ называется **алфавитным** (или **побуквенным**), если оно описывается следующей схемой:

1) заданы различные непустые коды букв алфавита A:

$$\begin{array}{rcl} \varphi(a_1) & = & B_1,\ B_1 \in B^*, \\ \varphi(a_2) & = & B_2,\ B_2 \in B^*, \\ \ldots, & & \\ \varphi(a_r) & = & B_r,\ B_r \in B^*, \end{array}$$

2) слова в алфавите A кодируются побуквенно, т. е. если $\alpha \in A^*$, $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m}$, где $m \geqslant 2$, то

$$\varphi(\alpha) = \varphi(a_{i_1})\varphi(a_{i_2}) \ldots \varphi(a_{i_m}) = B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_m}.$$

Алфавитный код

Пусть φ — алфавитное кодирование из A в B, т. е.

$$\varphi(a_1) = B_1,\ \varphi(a_2) = B_2,\ \ldots,\ \varphi(a_r) = B_r.$$

Коды букв алфавита A, т. е. слова $B_1, \ldots, B_r$, называются **кодовыми словами**.

Множество всех кодовых слов при кодировании φ назовем **алфавитным кодом** C_φ, т. е.

$$C_\varphi = \{B_1, \ldots, B_r\}.$$

Алфавитный код C_φ назовем **однозначным** (или **разделимым**), если кодирование φ — разделимо.

Декодирование

Пусть $C_\varphi = \{B_1, \ldots, B_r\} \subseteq B^*$ — алфавитный код и $\beta \in B^*$.

Декодировать слово β означает разбить его на последовательность кодовых слов (если это возможно), т. е. представить в виде:

$$\beta = B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_m},$$

где $B_{i_1}, \ldots, B_{i_m} \in C_\varphi$.

Если код C_φ является разделимым, то для любого слова $\beta \in B^*$ найдется не более одного декодирования.

Граф разделимости алфавитного кода

Пусть $C_\varphi = \{B_1, \dots, B_r\} \subseteq B^*$ — алфавитный код.

Построим *орграф* $G_\varphi = (V_\varphi, E_\varphi)$ разделимости кода C_φ.

1. Множество вершин V_φ, $V_\varphi \subseteq B^*$, состоит из пустого слова Λ и всех тех слов в алфавите B, которые являются собственным префиксом некоторого кодового слова и одновременно собственным суффиксом некоторого кодового слова (другого или, возможно, того же) и не являются никаким кодовым словом, т. е.

$$\begin{array}{rcll} V_\varphi & = & \{\beta \in B^* \mid & 1)\ \exists B_i \in C_\varphi : B_i = \beta\beta',\ \beta' \neq \Lambda; \\ & & & 2)\ \exists B_j \in C_\varphi : B_j = \beta''\beta,\ \beta'' \neq \Lambda; \\ & & & 3)\ \beta \neq B_k,\ k = 1, \dots, r\}. \end{array}$$

Граф разделимости алфавитного кода

Итак, $C_\varphi = \{B_1, \ldots, B_r\} \subseteq B^*$ — алфавитный код.

2. Опишем множество дуг E_φ: если $\beta', \beta'' \in V_\varphi$, то $(\beta', \beta'') \in E_\varphi$, если найдется такое кодовое слово B_i и такая последовательность D кодовых слов $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$, что

$$B_i = \beta' B_{i_1} \ldots B_{i_k} \beta'',$$

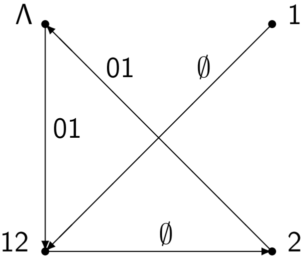
причем если $\beta' = \beta'' = \Lambda$, то $k \geqslant 2$; если $\beta' \neq \Lambda$ или $\beta'' \neq \Lambda$, то $k \geqslant 1$; если $\beta', \beta'' \neq \Lambda$, то $k \geqslant 0$.

При этом дуге $(\beta', \beta'') \in E_\varphi$ приписываем пометку D, где $D = B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$.

Граф разделимости алфавитного кода

Пример. Пусть $C_\varphi = \{01, 201, 112, 122, 0112\}$. Построим граф $G_\varphi = (V_\varphi, E_\varphi)$. Получаем: $V_\varphi = \{\Lambda, 1, 2, 12\}$.

G_φ :



Критерий разделимости алфавитного кода

Теорема 10.1. *Алфавитный код C_φ является разделимым тогда и только тогда, когда в графе G_φ отсутствуют ориентированные циклы (в том числе, и петли), проходящие через вершину Λ.*

Доказательство. Пусть $C_\varphi = \{B_1, \ldots, B_r\} \subseteq B^*$ — алфавитный код и G_φ — граф разделимости кода C_φ.

Критерий разделимости алфавитного кода

Доказательство. 1. Пусть код C_φ не является разделимым.

Значит, найдется слово $\beta \in B^*$ наименьшей длины, которое допускает не менее двух декодирований.

Пусть $\beta = B'_1 B'_2 \dots B'_{t_1}$ — разбиение слова β на кодовые слова в 1-м декодировании и $\beta = B''_1 B''_2 \dots B''_{t_2}$ — разбиение слова β на кодовые слова во 2-м декодировании.

Обозначим: $l'_i = |B'_i|$, $i = 1, \dots, t_1$, и $l''_i = |B''_i|$, $i = 1, \dots, t_2$.

Пусть, для определенности, $l''_1 > l'_1$.

Критерий разделимости алфавитного кода

Доказательство. Найдем такое число k_1, что

$$\sum_{i=1}^{k_1-1} l'_i < l''_1, \quad \sum_{i=1}^{k_1} l'_i > l''_1.$$

Заметим, что равенства здесь быть не может, т. к. в этом случае слово β можно было бы уменьшить, что не так.

Тогда $B''_1 = B'_1 \dots B'_{k_1-1}\beta_1$ для некоторого слова $\beta_1 \in B^*$, $\beta_1 \neq \Lambda$.

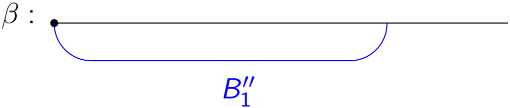
Отметим, что слово β_1 является собственным префиксом кодового слова B'_{k_1} и собственным суффиксом кодового слова B''_1, а также не является никаким кодовым словом.

Значит, в графе G_φ присутствует дуга $e_1 = (\Lambda, \beta_1) \in E_\varphi$, которой приписана пометка $D_1 = B'_1 \dots B'_{k_1-1}$.

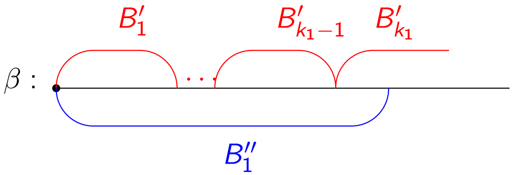
Пояснение выбора числа k_1

β :

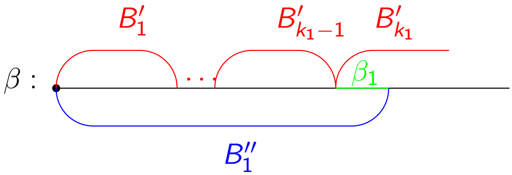
Пояснение выбора числа k_1



Пояснение выбора числа k_1



Пояснение выбора числа k_1



Критерий разделимости алфавитного кода

Доказательство. Теперь найдем такое число k_2, что

$$|\beta_1| + \sum_{i=2}^{k_2-1} l_i'' < l_{k_1}', \quad |\beta_1| + \sum_{i=2}^{k_2} l_i'' > l_{k_1}'.$$

Снова равенства быть не может, т. к. в этом случае слово β можно было бы уменьшить, что не так.

Тогда $B_{k_1}' = \beta_1 B_2'' \dots B_{k_2-1}'' \beta_2$ для некоторого слова $\beta_2 \in B^*$, $\beta_2 \neq \Lambda$.

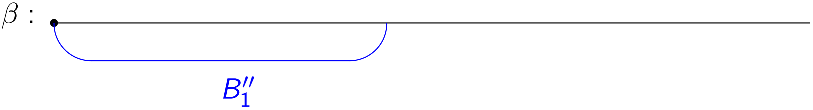
Слово β_2 является собственным префиксом кодового слова B_{k_2}'' и собственным суффиксом кодового слова B_{k_1}', а также не является никаким кодовым словом.

Значит, в графе G_φ присутствует дуга $e_2 = (\beta_1, \beta_2) \in E_\varphi$, которой приписана пометка $D_2 = B_2'' \dots B_{k_2-1}''$.

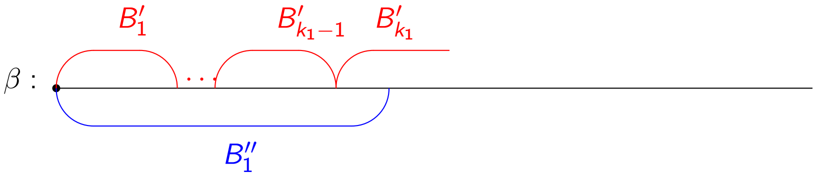
Пояснение выбора числа k_2

β :

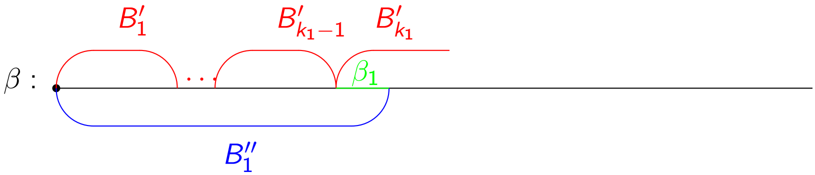
Пояснение выбора числа k_2



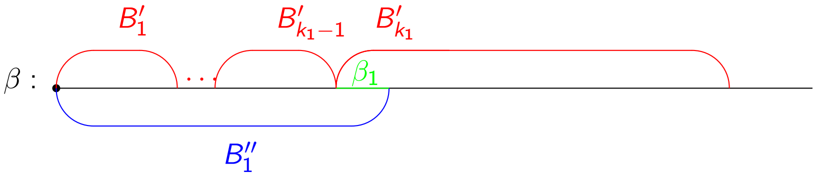
Пояснение выбора числа k_2



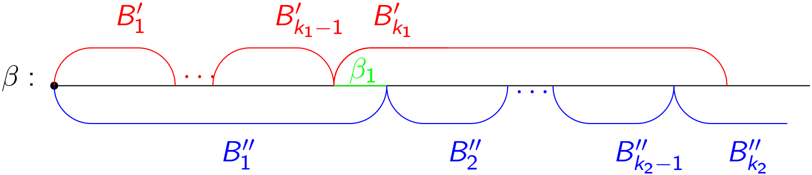
Пояснение выбора числа k_2



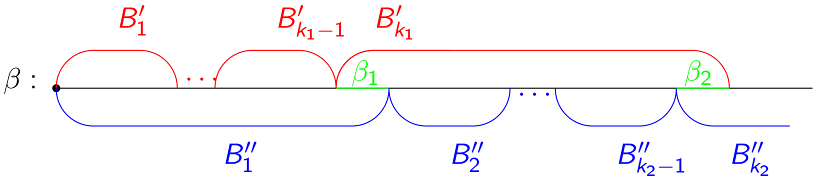
Пояснение выбора числа k_2



Пояснение выбора числа k_2



Пояснение выбора числа k_2



Доказательство. Далее найдем такое число k_3, что

$$|\beta_2| + \sum_{i=k_1+1}^{k_3-1} l'_i < l''_{k_2}, \quad |\beta_2| + \sum_{i=k_1+1}^{k_3} l'_i > l''_{k_2}.$$

Равенства быть не может, т. к. в этом случае слово β можно было бы уменьшить, что не так.

Тогда $B''_{k_3} = \beta_2 B'_{k_1+1} \ldots B'_{k_3-1} \beta_3$ для некоторого слова $\beta_3 \in B^*$, $\beta_3 \neq \Lambda$.

Значит, в графе G_φ присутствует дуга $e_3 = (\beta_2, \beta_3) \in E_\varphi$, которой приписана пометка $D_3 = B'_{k_1+1} \ldots B'_{k_3-1}$.

И т. д.

Критерий разделимости алфавитного кода

Доказательство. Через конечное число число таких шагов достигнем окончания слова β.

Значит, в графе G_φ присутствует дуга $e_{m+1} = (\beta_m, \Lambda) \in E_\varphi$ для некоторого слова $\beta_m \in B^*$, $\beta_m \neq \Lambda$.

Этой дуге e_{m+1} приписана пометка $D_{m+1} = B^\circ_{k_{m-1}+1} \dots B^\circ_{k_{m+1}-1}$, где $\circ \in \{', ''\}$ в зависимости от четности числа m.

Таким образом, в графе G_φ найдется ориентированный замкнутый путь:

$$P = \Lambda, e_1, \beta_1, e_2, \beta_2, \dots, \beta_m, e_{m+1}, \Lambda,$$

в котором вершина Λ не встречается среди вершин $\beta_1, \dots, \beta_m$.

Из этого пути P можно выделить ориентированный цикл (в частности, петлю), проходящий через вершину Λ.

Критерий разделимости алфавитного кода

Доказательство. 2. Пусть теперь в графе G_φ найдется ориентированный цикл (в частности, петля)

$$P = \Lambda, e_1, \beta_1, e_2, \beta_2, \dots, \beta_m, e_{m+1}, \Lambda,$$

проходящий через вершину Λ.

Пусть дуге e_i приписана пометка $D_i = B_{i_1}, \dots, B_{i_{k_i}}$, $i = 1, \dots, m, m+1$.

Покажем, что слово

$$\beta = D_1 \beta_1 D_2 \beta_2 \dots \beta_m D_{m+1} \in B^*$$

допускает не менее двух декодирований.

Критерий разделимости алфавитного кода

Доказательство. Итак, рассмотрим слово

$$\beta = D_1\beta_1 D_2\beta_2 \ldots \beta_m D_{m+1} \in B^*.$$

Пусть, для определенности, m — четно.

Первое декодирование:

$$D_1\beta_1 D_2\beta_2 D_3\beta_3 D_4 \ldots D_m\beta_m D_{m+1}.$$

Второе декодирование:

$$D_1\beta_1 D_2\beta_2 D_3\beta_3 D_4\beta_4 \ldots \beta_{m-1} D_m\beta_m D_{m+1}.$$

Случай нечетного m разбирается аналогично.

Значит, код C_φ не является разделимым. $\square$

Проверка разделимости алфавитного кода

Алгоритм проверки разделимости алфавитного кода

Вход: алфавитный код $C = \{B_1, \ldots, B_r\} \subseteq B^*$ в кодирующем алфавите B.

Выход: «да», если код C является разделимым, и «нет» и слово $\beta \in B^*$, допускающее не менее двух декодирований, в обратном случае.

Проверка разделимости алфавитного кода

Описание алгоритма.

1. Построить орграф G разделимости кода C.

2. Если граф G не содержит петель или направленных циклов, проходящих через «пустую» вершину, то выдать «да» и остановиться.

3. Иначе, пусть $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m, \beta_0$ — направленный цикл в G, где $\beta_i \in B^*$, $i = 1, \dots, m$, $\beta_0 = \Lambda$, причем дуга (β_{i-1}, β_i) помечена последовательностью D_i, $i = 1, \dots, m$, а дуга (β_m, β_0) помечена последовательностью D_{m+1}. Тогда выдать «нет» и

$$\beta = D_1\beta_1 D_2\beta_2 \dots \beta_m D_{m+1} \in B^*$$

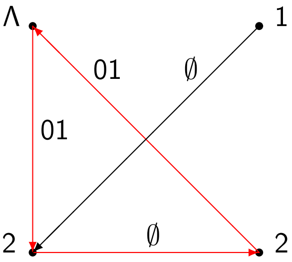
и остановиться.

Окончание описания алгоритма.

Проверка разделимости алфавитного кода

Пример. Рассмотрим код $C_\varphi = \{01, 201, 112, 122, 0112\}$.

G_φ :



Получаем:

$$\beta = 0112201 = 0112 + 201 = 01 + 122 + 01.$$

Литература

1. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012. С. 41–46.