Лекция 8. Раскраски. Эквивалентность раскрасок относительно группы. Теорема Пойа. Производящие функции. Перечисляющий ряд для цветов и перечисляющий ряд для раскрасок. Теорема Пойа (общий случай). Примеры.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Раскраски

Пусть $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множество цветов.

Раскраской элементов множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ в m цветов называется отображение

$$f : N \to M.$$

Множество всех раскрасок элементов множества N в m цветов обозначим как $R_{n,m}$.

Утверждение 1. $|R_{n,m}| = m^n$.

Эквивалентность раскрасок

Пусть G — подгруппа группы перестановок S_n, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Определим бинарное отношение R_G на множестве $R_{n,m}$: если $f_1, f_2 \in R_{n,m}$, то

$$f_1 \; R_G \; f_2 \;\Leftrightarrow\; \exists \pi \in G : \; \forall x \in N \;\; f_2(x) = f_1(\pi(x)).$$

Эквивалентность раскрасок

Утверждение 2. *Отношение R_G является отношением эквивалентности на множестве $R_{n,m}$.*

Доказательство. Свойства отношения эквивалентности.

1) Рефлексивность. Для любой раскраски $f(x) \in R_{n,m}$ верно $f(\pi_e(x)) = f(x)$, поэтому $f \ R_G \ f$.

2) Симметричность. Пусть для раскрасок $f_1(x), f_2(x) \in R_{n,m}$ верно $f_1 \ R_G \ f_2$, т. е. найдется такая перестановка $\pi \in G$, что $f_2(x) = f_1(\pi(x))$. Тогда

$$f_2(\pi^{-1}(x)) = f_1(\pi(\pi^{-1}(x))) = f_1(x),$$

поэтому $f_2 \ R_G \ f_1$.

Эквивалентность раскрасок

Доказательство (продолжение).

3) Транзитивность. Пусть для раскрасок $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x) \in R_{n,m}$ верно $f_1 \ R_G \ f_2$ и $f_2 \ R_G \ f_3$, т. е. найдутся такие перестановки $\pi_1 \in G$ и $\pi_2 \in G$, что $f_2(x) = f_1(\pi_1(x))$ и $f_3(x) = f_2(\pi_2(x))$. Тогда

$$f_1((\pi_1 \circ \pi_2)(x)) = f_1(\pi_1(\pi_2(x))) = f_2(\pi_2(x)) = f_3(x).$$

Т. к. G — группа, $\pi_1 \circ \pi_2 \in G$, поэтому $f_1 \ R_G \ f_3$.

$\square$

Эквивалентность раскрасок

Отношение эквивалентности R_G обозначается как $\sim_G$.

Если для раскрасок $f_1, f_2 \in R_{n,m}$ верно $f_1 \sim_G f_2$, то говорят, что раскраски f_1 и f_2 **эквивалентны по группе** G (или **относительно группы** G).

Пример: раскраски вершин правильного треугольника

Пример. Рассмотрим раскраски вершин правильного треугольника в два цвета: красный и синий.
Тогда раскраски

$$f_1 : 1 \to \text{красный},\ \ 2, 3 \to \text{синий},$$

и

$$f_2 : 3 \to \text{красный},\ \ 1, 2 \to \text{синий},$$

эквивалентны относительно группы H вращений правильного треугольника в плоскости, т. к. для перестановки $\pi = (123) \in H$ верно $f_1(\pi(x)) = f_2(x)$.
А раскраски f_1 и

$$f_3 : 1, 2 \to \text{красный},\ \ 3 \to \text{синий},$$

неэквивалентны относительно группы H. Почему?

Орбита раскраски

Для раскраски $f \in R_{n,m}$ ее **орбитой** в группе G называется класс эквивалентности этой раскраски по отношению эквивалентности $\sim_G$.

Обозначение: O_f,

$$O_f = \{f(\pi(x)) \mid \pi \in G\}.$$

Число различных орбит (относительно группы G) — число неэквивалентных раскрасок (относительно группы G).

В каких случаях возникают такие задачи?

Подсчет числа ожерелий

Задача подсчета **числа ожерелий**.

Сколько различных ожерелий можно составить из n бусин m цветов?
Два ожерелья считаются **одинаковыми**, если одно из них получается из другого вращением в плоскости (без зеркальных отражений).

Эта задача состоит **в подсчете числа орбит раскрасок** вершин правильного n-угольника в m цветов относительно группы G вращений этого n-угольника в плоскости.

Классификация функций алгебры логики

Задача подсчета **числа классов эквивалентностей функций алгебры логики**.

Сколько найдется различных функций алгебры логики, зависящих от n переменных, каждая из которых **не может быть получена** из другой навешиванием отрицаний над переменными?

Например, пусть $n = 2$. Тогда функции

$$f_1(x_1, x_2) = x_1x_2 \text{ и } f_2(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus x_1 = x_1\bar{x}_2$$

могут быть получены одна из другой навешиванием отрицаний над переменными, а функции

$$f_1(x_1, x_2) = x_1x_2 \text{ и } f_3(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$$

не могут (почему?).

Классификация функций алгебры логики

Заметим, что каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определяет на кубе E_2^n **раскраску** его вершин **в два цвета**: 0 и 1.

Поэтому задача состоит **в подсчете числа орбит раскрасок** вершин куба E_2^n в 2 цвета (0 или 1) относительно некоторой группы перестановок G, $G \subseteq S_{2^n}$, вершин куба E_2^n.

Эта группа перестановок вершин куба называется **группой инвертирования переменных** (или **группой сдвигов**) J_n.

Теорема Пойа (частный случай)

Метод решения таких задач предлагает **теорема Пойа**.

Теорема Пойа (частный случай)

Теорема 1 (Д. Пойа). *Число $N(G; m)$ орбит раскрасок элементов множества N в m цветов по подгруппе G группы перестановок S_n равно*

$$N(G; m) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} m^{\lambda_1(\pi)} \cdot \ldots \cdot m^{\lambda_n(\pi)} = Z_G(t_1 = m, \ldots, t_n = m),$$

где $Z_G(t_1, \ldots, t_n)$ – цикловой индекс группы перестановок G.

Теорема Пойа

Доказательство. Пусть $G = \{\pi_1 = e, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$ и $R_{n,m} = \{f_1, \ldots, f_{m^n}\}$.

Для каждой перестановки $\pi \in G$ построим соответствующую ей перестановку $\Pi_\pi \in S(R_{n,m})$:

$$\Pi_\pi = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_{m^n}(x) \\ f_1(\pi(x)) & f_2(\pi(x)) & \ldots & f_{m^n}(\pi(x)) \end{pmatrix}.$$

Положим

$$T = \{\Pi_{\pi_1}, \ldots, \Pi_{\pi_k}\}.$$

Теорема Пойа

Доказательство. Проверим, что $H = (T; \circ)$ является группой.

Свойства группы.
1) Ассоциативность операции $\circ$.
2) Существование нейтрального элемента: $\Pi_e \in H$.
3) Для каждого элемента $\Pi_\pi \in H$ существование обратного элемента: $\Pi_{\pi^{-1}} \in H$.

Теорема Пойа

Доказательство. Итак, $H = (T, \circ)$ — подгруппа симметрической группы перестановок $S(R_{n,m})$.

Рассмотрим действие группы перестановок H на множестве $R_{n,m}$.

Если $\pi \in G$ и $f(x) \in R_{n,m}$, то

$$\Pi_{\pi}(f(x)) = f(\pi(x)) \in R_{n,m}.$$

Теорема Пойа

Доказательство. Если $f_i, f_j \in R_{n,m}$, то f_i и f_j эквивалентны по группе H в том случае, когда найдется такая перестановка $\pi \in G$, что

$$\Pi_\pi(f_i(x)) = f_j(x),$$

т. е.

$$f_j(x) = f_i(\pi(x)).$$

Но это означает, что раскраски f_i и f_j **эквивалентны по группе** G.

Значит,

$$f_i \sim_G f_j \;\Leftrightarrow\; f_i \sim_H f_j.$$

Теорема Пойа

Доказательство. Следовательно, число орбит $N(G; m)$ раскрасок элементов множества N в m цветов **совпадает** с числом орбит $N(H)$ элементов множества $R_{n,m}$ по группе H, т. е.

$$N(G; m) = N(H).$$

По лемме Бернсайда

$$N(H) = \frac{1}{|H|} \sum_{\pi \in G} \lambda_1(\Pi_\pi).$$

Из $|H| = |G|$ находим:

$$N(H) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \lambda_1(\Pi_\pi).$$

Теорема Пойа

Лемма 1. *Для любой раскраски* $f(x) \in R_{n,m}$ *равенство* $f(x) = f(\pi(x))$, *где* $\pi \in G$, *выполняется тогда и только тогда, когда для каждого цикла перестановки* π *все его элементы* **окрашены в один и тот же цвет** *раскраской* f.

Доказательство леммы. 1. Пусть $f(x) = f(\pi(x))$.

Предположим обратное: пусть найдутся такие $a, b \in N$, принадлежащие одному циклу перестановки π, что $f(a) \neq f(b)$. Можно считать, что $b = \pi(a)$.

Тогда

$$f(b) = f(\pi(a)) = f(a) \neq f(b).$$

Теорема Пойа

Лемма 1. *Для любой раскраски* $f(x) \in R_{n,m}$ *равенство* $f(x) = f(\pi(x))$, *где* $\pi \in G$, *выполняется тогда и только тогда, когда все элементы каждого цикла перестановки* π **окрашены в один и тот же цвет** *раскраской* f.

Доказательство леммы. 2. Пусть все элементы каждого цикла перестановки π окрашены в один и тот же цвет раскраской f.

Тогда если $a, b \in N$ из одного цикла перестановки π, то

$$f(b) = f(a).$$

Поэтому

$$f(x) = f(\pi(x)).$$

$\square$

Теорема Пойа

Доказательство теоремы (продолжение). Итак,

$$\Pi_\pi = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_{m^n}(x) \\ f_1(\pi(x)) & f_2(\pi(x)) & \dots & f_{m^n}(\pi(x)) \end{pmatrix}.$$

Нам нужно подсчитать число $\lambda_1(\Pi_\pi)$, т. е. число неподвижных элементов перестановки Π_π, $\pi \in G$.

Т. е. нужно подсчитать число таких раскрасок $f(x) \in R_{n,m}$, что

$$f(x) = f(\pi(x)).$$

Теорема Пойа

По лемме 1 равенство $f(x) = f(\pi(x))$ выполняется тогда и только тогда, когда все элементы каждого цикла перестановки π **окрашены в один и тот же цвет** раскраской f.

Значит, для каждого из циклов перестановки π найдется только m возможностей окрасить его элементы.

Поэтому

$$\lambda_1(\Pi_\pi) = m^{\lambda_1(\pi)} \cdot m^{\lambda_2(\pi)} \cdot \ldots \cdot m^{\lambda_n(\pi)}.$$

Теорема Пойа

Следовательно,

$$N(G;m) = N(H) = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} m^{\lambda_1(\pi)}\cdot\ldots\cdot m^{\lambda_n(\pi)},$$

или

$$N(G;m) = Z_G(t_1 = m, \ldots, t_n = m).$$

$\square$

Пример: подсчет числа ожерелий

Пример. Найдем число различных ожерелий из 3-х бусин 2-х цветов. Т. е. найдем число орбит раскрасок в два цвета вершин правильного треугольника по группе H его вращений в плоскости. По теореме Пойа

$$N(H;2) = Z_H(t_1 = 2, t_2 = 2, t_3 = 2).$$

Напомним, что

$$Z_H(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{3}(t_1^3 + 2t_3).$$

Тогда

$$N(H;2) = \frac{1}{3}(2^3 + 2 \cdot 2) = 4.$$

Какие раскраски определяют эти орбиты?

1) Все вершины красные; 2) две вершины красные, одна синяя;
3) одна вершина красная, две синие; 4) все вершины синие.

Пример: классификация функций алгебры логики

Пример. Найдем число таких различных функций алгебры логики, зависящих от 2-х переменных, что ни одна из них не может быть получена ни из какой другой навешиванием отрицаний над переменными.

Найдем цикловой индекс группы J_2:

N	x x_1x_2		$\pi_1(x)$ x_1x_2	$\pi_2(x)$ $x_1\bar{x}_2$	$\pi_3(x)$ $\bar{x}_1x_2$	$\pi_4(x)$ $\bar{x}_1\bar{x}_2$
1	00		00(1)	01(2)	10(3)	11(4)
2	01		01(2)	00(1)	11(4)	10(3)
3	10		10(3)	11(4)	00(1)	01(2)
4	11		11(4)	10(3)	01(2)	00(1)

Получаем, что $\lambda(\pi_1) = (4, 0, 0, 0)$, и $\lambda(\pi_i) = (0, 2, 0, 0)$ при $i = 2, 3, 4$.

Пример: классификиция функций алгебры логики

Следовательно,

$$Z_{J_2}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{4}(t_1^4 + 3t_2^2).$$

По теореме Пойа

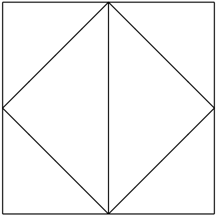
$$N(J_2; 2) = Z_{J_2}(2, 2, 2, 2) = \frac{1}{4}(2^4 + 3 \cdot 2^2) = 7.$$

Какие это функции? Здесь они перечислены:

$$0; \ 1; \ x_1; \ x_2; \ x_1x_2, \ x_1 \oplus x_2; \ x_1 \vee x_2.$$

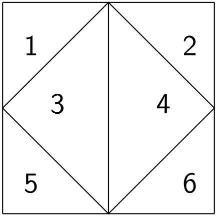
Пример: подсчет числа витрин

Пример. Найдем число различных раскрасок частей прозрачной витрины



в красный, синий и зеленый цвета относительно ее вращений в пространстве.

Пример: подсчет числа витрин



Найдем цикловой индекс группы G вращений этой витрины в пространстве.

$$\begin{array}{ll}\pi_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6) & \lambda(\pi_1) = (6,0,0,0,0,0),\\ \pi_2 = (1,6)(2,5)(3,4) & \lambda(\pi_2) = (0,3,0,0,0,0),\\ \pi_3 = (1,2)(3,4)(5,6) & \lambda(\pi_3) = (0,3,0,0,0,0),\\ \pi_4 = (1,5)(2,6)(3)(4) & \lambda(\pi_4) = (2,2,0,0,0,0).\end{array}$$

Значит, $Z_G(t_1,\dots,t_6) = \frac{1}{4}(t_1^6 + 2t_2^3 + t_1^2 t_2^2)$.

Пример: подсчет числа витрин

По теореме Пойа

$$N(G;3) = Z_G(t_1 = 3, \ldots, t_6 = 3).$$

Следовательно,

$$N(G;3) = \frac{1}{4} \cdot (3^6 + 2 \cdot 3^3 + 3^2 \cdot 3^2) = \frac{3^3}{4} \cdot (27 + 2 + 3) = 27 \cdot 8 = 216.$$

Отметим, что число всех раскрасок (без учета эквивалентности) частей этой витрины в 3 цвета равно $3^6 = 729$.

Подсчет числа ожерелий с ограничениями

Теорема Пойа позволяет подсчитать число ожерелий из n бусин m цветов.

Как найти число различных ожерелий из 5 бусин 3-х цветов — красного, синего и белого, в которых ровно одна белая бусина?

Или, как подсчитать число различных ожерелий из 7 бусин 3-х цветов — красного, синего и белого, в которых не менее 3-х красных бусин?

Ответ предлагает **общий случай теоремы Пойа**.

Производящие функции

Для последовательности чисел $\{a_k\}$ рассмотрим формальную сумму $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, где $t \in \mathbb{R}$.

Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ сходится в некоторой области $t \in D$, то в области D эта сумма определяет функцию

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

Эта функция называется **производящей функцией** для последовательности $\{a_k\}$.

Над производящими функциями определяются операции сложения, умножения и т. д. как соответствующие операции над соответствующими рядами.

Производящие функции

Если последовательность $\{a_k\}$ — **конечна**,

$$\{a_k\} = a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

то сумма $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$ является **многочленом** и **всегда** определяет производящую функцию

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k.$$

Как правило, мы будем рассматривать производящие функциии для конечных последовательностей.

Производящие функции

Например, конечная последовательность биномиальных коэффициентов

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n$$

определяет производящую функцию

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k = (t+1)^n.$$

Раскраски

Пусть G — подгруппа симметрической группы перестановок S_n.

Пусть $M = \{1, 2, \dots, m\}$ — множество цветов и $f : N \to M$ — раскраска элементов из N в m цветов.

Множество всех раскрасок элементов из N в m цветов обозначается $R_{n,m}$

Раскраски $f_1(x), f_2(x) \in R_{n,m}$ **эквивалентны относительно группы** G ($f_1 \sim_G f_2$), если

$$\exists \pi \in G : \forall x \in N \; f_2(x) = f_1(\pi(x)).$$

Перечисляющий ряд для цветов

Пусть на множестве цветов M задана функция **весов** $w : M \to \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ — расширенный натуральный ряд.

Пусть q_k — число цветов веса k в множестве M.

Производящая функция

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k t^k$$

называется **перечисляющим рядом для цветов** (или **перечисляющим рядом для фигур**).

Отметим, что в сумме для $Q(t)$ только конечное число ненулевых слагаемых.

Перечисляющий ряд для цветов

Пример. Пусть $M = \{0, 1, 2\}$ — множество цветов и $w : M \to \mathbb{N}_0$ — функция весов,

i	$w(i)$
0	0
1	0
2	1

Тогда перечисляющий ряд для цветов имеет вид:

$$Q(t) = 2 + t.$$

Перечисляющий ряд для цветов

Пример. Пусть $M = \{0, 1, 2\}$ — множество цветов и $w : M \to \mathbb{N}_0$ — функция весов,

i	$w(i)$
0	1
1	3
2	0

Тогда перечисляющий ряд для цветов имеет вид:

$$Q(t) = 1 + t + t^3.$$

Вес раскраски

Вес раскраски $f(x) \in R_{n,m}$ определяется как

$$w(f) = \sum_{x \in N} w(f(x)).$$

Отметим, что если $f(x) \in R_{n,m}$ — раскраска и $\pi \in S_n$, то

$$w(f(x)) = w(f(\pi(x))).$$

Вес раскраски

Пример. Пусть $M = \{0, 1, 2\}$ — множество цветов и $w : M \to \mathbb{N}_0$ — функция весов,

i	$w(i)$
0	0
1	0
2	1

Пусть $N = \{1, 2, 3\}$ — множество вершин правильного треугольника и $f : N \to M$ — раскраска,

x	1	2	3
$f(x)$	0	2	2

Тогда

$$w(f) = w(f(1)) + w(f(2)) + w(f(3)) = 2.$$

Вес орбиты раскраски

Если $f_1 \sim_G f_2$, то $w(f_1) = w(f_2)$.

Поэтому введем **вес орбиты** O_f как вес любого ее элемента. т. е.

$$w(O_f) = w(f).$$

Перечисляющий ряд для раскрасок

Пусть φ_k — число орбит веса k в $R_{n,m}$.

Производящая функция

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k$$

называется **перечисляющим рядом для раскрасок** (или **перечисляющим рядом для конфигураций**).

Отметим, что в сумме для $\Phi(t)$ также только конечное число ненулевых слагаемых.

Теорема Пойа (общий случай)

Рассмотрим общий случай **теоремы Пойа**.

Теорема 2 (Д. Пойа). *Пусть G — подгпуппа группы перестановок S_n и $w : M \to \mathbb{N}_0$ — функция весов цветов из $M = \{1, 2, \dots, m\}$. Тогда перечисляющий ряд для раскрасок $\Phi(t)$ равен*

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k = Z_G(t_1 = Q(t), \dots, t_n = Q(t^n)),$$

где $Z_G(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} t_1^{\lambda_1(\pi)} \cdot \ldots \cdot t_n^{\lambda_n(\pi)}$ — цикловой индекс группы перестановок G, а $Q(t)$ — перечисляющий ряд для цветов.

Примеры

Рассмотрим примеры подсчета раскрасок с ограничениями.

Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

Пример. Подсчитаем число различных ожерелий из 5-ти бусин красного, синего и *белого* цветов, в которых **ровно одна** *белая* бусина.

Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

Решение. Найдем цикловой индекс группы H_5 вращений правильного пятиугольника в плоскости:

$$Z_{H_5}(t_1, \dots, t_5) = \frac{1}{5}(t_1^5 + 4t_5).$$

Введем функцию весов цветов w:

$$w(\text{красный}) = w(\text{синий}) = 0, \;\; w(\textit{белый}) = 1.$$

Перечисляющий ряд для цветов имеет вид:

$$Q(t) = 2 + t.$$

По теореме Пойа

$$\Phi(t) = Z_{H_5}(Q(t), Q(t^2), Q(t^3), Q(t^4), Q(t^5)) = \frac{1}{5}((2+t)^5+4(2+t^5)).$$

Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

Но

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k,$$

где φ_k — число орбит раскрасок веса k.

Условию «**ровно одна** *белая* бусина» подходит φ_1.

Поэтому в многочлене

$$\Phi(t) = \frac{1}{5}((2+t)^5 + 4(2+t^5))$$

надо найти коэффициент при t^1.

Получаем: $\varphi_1 = \frac{1}{5} \cdot C_5^4 \cdot 2^4 = 16$.

Значит, найдется 16 ожерелий с одной *белой* бусиной.

Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

Пример. Подсчитаем число различных раскрасок граней правильного тетраэдра в красный, синий и зеленый цвета, при которых найдется не менее одной красной грани и не более одной синей грани.

Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

Решение. Найдем цикловой индекс группы G вращений правильного тетраэдра в пространстве:

$$Z_G(t_1, \ldots, t_4) = \frac{1}{12}(t_1^4 + 8t_1t_3 + 3t_2^2).$$

Введем функцию весов цветов w:

$$w(\text{зеленый}) = 0, \;\; w(\text{красный}) = 1, \;\; w(\text{синий}) = 5.$$

Перечисляющий ряд для цветов имеет вид:

$$Q(t) = 1 + t + t^5.$$

По теореме Пойа

$$\Phi(t) = Z_G(Q(t), Q(t^2), Q(t^3), Q(t^4)),$$

т. е.

$$\Phi(t) = \frac{1}{12}((1+t+t^5)^4+8(1+t+t^5)(1+t^3+t^{15})+3(1+t^2+t^{10})^2).$$

Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

Но

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k,$$

где φ_k — число орбит раскрасок веса k.

Условию «не менее одной красной грани и не более одной синей грани» подходят $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ и $\varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$.
Поэтому в многочлене

$$\Phi(t) = \frac{1}{12}((1+t+t^5)^4 + 8(1+t+t^5)(1+t^3+t^{15}) + 3(1+t^2+t^{10})^2).$$

надо найти коэффициенты при $t^1, t^2, t^3, t^4, t^6, t^7, t^8$.

Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

Итак,

$$\Phi(t) = \frac{1}{12}((1+t+t^5)^4+8(1+t+t^5)(1+t^3+t^{15})+3(1+t^2+t^{10})^2),$$

и надо найти коэффициенты при $t^1, t^2, t^3, t^4, t^6, t^7, t^8$.
Получаем:

$$\begin{aligned}
t^1 &: \quad \tfrac{1}{12}\cdot(4+8+0)=1,\\
t^2 &: \quad \tfrac{1}{12}\cdot(6+0+6)=1,\\
t^3 &: \quad \tfrac{1}{12}\cdot(4+8+0)=1,\\
t^4 &: \quad \tfrac{1}{12}\cdot(1+8+3)=1,\\
t^6 &: \quad \tfrac{1}{12}\cdot(12+0+0)=1,\\
t^7 &: \quad \tfrac{1}{12}\cdot(12+0+0)=1,\\
t^8 &: \quad \tfrac{1}{12}\cdot(4+8+0)=1.
\end{aligned}$$

Значит, найдется 7 таких раскрасок тетраэдра.

Задачи для самостоятельного решения

1. [2] Гл. VIII 4.9–4.10.

2. По теореме Пойа найти число различных ожерелий из p бусин m цветов, если p — простое число.

3. По теореме Пойа найти число различных ожерелий из 6-ти бусин
1) трех цветов;
2) красного, синего и белого цветов, в которых не более двух синих бусин.

4. По теореме Пойа найти число раскрасок граней правильного тетраэдра
1) в два цвета;
2) в синий, красный и зеленый цвета так, что есть хотя бы одна грань каждого из цветов.

Литература к лекции

1. Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007. С. 57–61.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. С. 273–275.

Конец лекции