

Лекция 9. Раскраски. Эквивалентность раскрасок относительно группы. Производящие функции. Перечисляющий ряд для цветов и перечисляющий ряд для раскрасок. Теорема Пойа. Примеры.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте <http://mk.cs.msu.ru>

Подсчет числа ожерелий с ограничениями

Теорема Пойа позволяет подсчитать число ожерелий из n бусин t цветов.

Как найти число различных ожерелий из 5 бусин 3-х цветов — красного, синего и белого, в которых **ровно одна** белая бусина?

Или, как подсчитать число различных ожерелий из 7 бусин 3-х цветов — красного, синего и белого, в которых **не менее 3-х** красных бусин?

Ответ предлагает **общий случай** теоремы Пойа.

Производящие функции

Для последовательности чисел $\{a_k\}$ рассмотрим формальную сумму $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, где $t \in \mathbb{R}$.

Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ сходится в некоторой области $t \in D$, то в области D эта сумма определяет функцию

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

Эта функция называется **производящей функцией** для последовательности $\{a_k\}$.

Над производящими функциями определяются операции сложения, умножения и т.д. как соответствующие операции над соответствующими рядами.

Производящие функции

Если последовательность $\{a_k\}$ — конечна,

$$\{a_k\} = a_1, a_2, \dots, a_n,$$

то сумма $\sum_{k=0}^n a_k t^k$ является **многочленом** и всегда определяет производящую функцию

$$F(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k.$$

Как правило, мы будем рассматривать производящие функции для конечных последовательностей.

Производящие функции

Например, конечная последовательность биномиальных коэффициентов

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n$$

определяет производящую функцию

$$F(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k = (t + 1)^n.$$

Раскраски

Пусть конечная группа G действует на множестве $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

Пусть $M = \{1, 2, \dots, m\}$ — множество цветов, и $f : N \rightarrow M$ — раскраска элементов из N в m цветов.

Множество всех раскрасок элементов из N в m цветов обозначается $R(N, M)$

Раскраски $f_1(x), f_2(x) \in R(N, M)$ эквивалентны относительно группы G ($f_1 \sim_G f_2$), если

$$\exists g \in G : \forall x \in N \quad f_2(x) = f_1(\pi_g(x)).$$

Перечисляющий ряд для цветов

Пусть на множестве цветов M задана функция весов $w : M \rightarrow \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ — расширенный натуральный ряд.

Пусть q_k — число цветов веса k в множестве M .

Производящая функция

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k t^k$$

называется **перечисляющим рядом для цветов** (или **перечисляющим рядом для фигур**).

Отметим, что в сумме для $Q(t)$ только **конечное число ненулевых слагаемых**.

Перечисляющий ряд для цветов

Пример. Пусть $M = \{0, 1, 2\}$ — множество цветов и $w : M \rightarrow \mathbb{N}_0$ — функция весов,

i	$w(i)$
0	0
1	0
2	1

Тогда перечисляющий ряд для цветов имеет вид:

$$Q(t) = 2 + t.$$

Перечисляющий ряд для цветов

Пример. Пусть $M = \{0, 1, 2\}$ — множество цветов и $w : M \rightarrow \mathbb{N}_0$ — функция весов,

i	$w(i)$
0	1
1	3
2	0

Тогда перечисляющий ряд для цветов имеет вид:

$$Q(t) = 1 + t + t^3.$$

Вес раскраски

Вес раскраски $f(x) \in R(N, M)$ определяется как

$$w(f) = \sum_{x \in N} w(f(x)).$$

Если $f(x) \in R(N, M)$ — раскраска и $g \in G$, то

$$w(f(x)) = w(f(\pi_g(x))).$$

Вес раскраски

Пример. Пусть $M = \{0, 1, 2\}$ — множество цветов и $w : M \rightarrow \mathbb{N}_0$ — функция весов,

i	$w(i)$
0	0
1	0
2	1

Пусть $N = \{1, 2, 3\}$ — множество вершин правильного треугольника и $f : N \rightarrow M$ — раскраска,

x	1	2	3
$f(x)$	0	2	2

Тогда

$$w(f) = w(f(1)) + w(f(2)) + w(f(3)) = 2.$$

Вес орбиты раскраски

Если $f_1 \sim_G f_2$, то $w(f_1) = w(f_2)$.

Поэтому введем **вес орбиты** O_f как вес любого ее элемента.

Т.е.

$$w(O_f) = w(f).$$

Перечисляющий ряд для раскрасок

Пусть φ_k — число орбит веса k в $R(N, M)$.

Производящая функция

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k$$

называется **перечисляющим рядом для раскрасок** (или **перечисляющим рядом для конфигураций**).

Отметим, что в сумме для $\Phi(t)$ также только **конечное число ненулевых слагаемых**.

Теорема Пойа (общий случай)

Рассмотрим общий случай **теоремы Пойа**.

Теорема 1 (Пойа). Пусть конечная группа G действует на множестве $N = \{1, 2, \dots, n\}$, и $w : M \rightarrow \mathbb{N}_0$ — функция весов цветов из $M = \{1, 2, \dots, m\}$. Тогда перечисляющий ряд для раскрасок $\Phi(t)$ равен

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k = Z_G(t_1 = Q(t), \dots, t_n = Q(t^n)),$$

где $Z_G(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} t_1^{\lambda_1(\pi_g)} \cdot \dots \cdot t_n^{\lambda_n(\pi_g)}$ — цикловой индекс группы G при этом действии, а $Q(t)$ — перечисляющий ряд для цветов.

Теорема Пойа

Доказательство. Проведем доказательство теоремы для случая тождественного действия группы G на множестве N , т.е. когда G является подгруппой $S(N)$.

Итак, $w : M \rightarrow \mathbb{N}_0$ — функция весов цветов и пусть q_j — число цветов веса j из M .

Если $f(x)$ — раскраска из $R(N, M)$, то $w(f) = \sum_{a \in N} w(f(a))$.

Отметим, что если $g \in G$, то $w(f(x)) = w(f(\pi_g(x)))$.

Теорема Пойа

Далее, перечисляющий ряд для раскрасок имеет вид:

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k,$$

где φ_k — число орбит раскрасок веса k .

1. Оценим φ_k .

Пусть $R_k = \{f_1, \dots, f_l\}$ — все раскраски веса k .

Для каждого $g \in G$ построим соответствующую ему перестановку Π_g :

$$\Pi_g = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_l(x) \\ f_1(\pi_g(x)) & f_2(\pi_g(x)) & \dots & f_l(\pi_g(x)) \end{pmatrix}.$$

Теорема Пойа

Положим

$$T_k = \{\Pi_g \mid g \in G\}.$$

Проверим, что $G_k = (T_k, \circ)$ является группой.

Свойства группы.

- 1) Ассоциативность операции \circ .
- 2) Существование нейтрального элемента: $\Pi_e \in G_k$, где e — нейтральный элемент в группе G .
- 3) Для каждого элемента $\Pi_g \in G_k$ существование обратного элемента: $\Pi_{g'} \in G_k$, где элемент g' симметричен к элементу g в группе G .

Теорема Пойа

Итак, $G_k = (T_k, \circ)$ — подгруппа симметрической группы перестановок $S(R_k)$.

Рассмотрим **тождественное** действие группы G_k на множестве R_k .

Т.е. если $\Pi_g \in G_k$, где $g \in G$, и $f(x) \in R_k$, то

$$\Pi_g(f(x)) = f(\pi_g(x)).$$

Теорема Пойа

Если $f_i, f_j \in R_k$, то f_i и f_j эквивалентны по группе G_k , если найдется $\Pi_g \in G_k$, где $g \in G$, что

$$\Pi_g(f_i(x)) = f_j(x),$$

т.е.

$$f_j(x) = f_i(\pi_g(x)).$$

Но это означает, что раскраски f_i и f_j эквивалентны по группе G .

Значит, для любых $f_i, f_j \in R_k$ верно

$$f_i \sim_G f_j \Leftrightarrow f_i \sim_{G_k} f_j.$$

Теорема Пойа

Следовательно, число орбит φ_k раскрасок веса k элементов множества N совпадает с числом орбит $N(G_k)$ элементов множества R_k по группе G_k , т.е.

$$\varphi_k = N(G_k).$$

По лемме Бернсайда

$$N(G_k) = \frac{1}{|G_k|} \sum_{g \in G} \lambda_1(\Pi_g).$$

Из $|G_k| = |G|$ получаем:

$$\varphi_k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda_1(\Pi_g).$$

Теорема Пойа

Число $\lambda_1(\Pi_g)$ раскрасок веса k , которые перестановка π_g , $g \in G$, оставляет на месте, обозначим через $\varphi_k(\pi_g)$.

2. Оценим $\varphi_k(\pi_g)$.

Лемма 2. *Справедливо равенство:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\pi_g) t^k = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k_i=0}^{\infty} q_{k_i} t^{i \cdot k_i} \right)^{\lambda_i(\pi_g)},$$

где q_j — число цветов веса j из M , а

$\lambda(\pi_g) = (\lambda_1(\pi_g), \dots, \lambda_n(\pi_g))$ — тип перестановки π_g .

Теорема Пойа

Рассмотрим раскраски $f(x) \in R(N, M)$, которые **перестановка π_g , $g \in G$, оставляет на месте**, т.е

$$f(x) = f(\pi_g(x)).$$

Если $f(x) \in R(N, M)$, то по лемме 1 для $f(x) = f(\pi_g(x))$ необходимо и достаточно, чтобы **все элементы каждого цикла перестановки π_g были окрашены в один и тот же цвет**.

Напомним, что $\lambda(\pi_g) = (\lambda_1(\pi_g), \dots, \lambda_n(\pi_g))$ — тип перестановки π_g .

Теорема Пойа

Рассмотрим произвольный цикл C длины i перестановки π_g .

Перечисляющий ряд $\Phi_{\pi_g, C}(t)$ для раскрасок цикла C , которые перестановка π_g оставляет на месте, имеет вид:

$$\Phi_{\pi_g, C}(t) = \sum_{k_i=0}^{\infty} q_{k_i} t^{i \cdot k_i}.$$

Почему?

Для любой раскраски $f(x)$, которая все элементы цикла C красит в цвет веса k_i , ее вес $f(C)$ по циклу C равен:

$$w(f(C)) = \sum_{a \in C} w(f(a)) = i \cdot k_i.$$

Кроме того, найдется ровно q_{k_i} цветов веса k_i из M .

Теорема Пойа

Далле, все циклы перестановки π_g можно красить **независимо друг от друга**.

Поэтому перечисляющий ряд $\Phi_{\pi_g, i}(t)$ для раскрасок всех циклов длины i , которые перестановка π_g оставляет на месте, можно получить так:

$$\Phi_{\pi_g, i}(t) = \left(\sum_{k_i=0}^{\infty} q_{k_i} t^{i \cdot k_i} \right)^{\lambda_i(\pi_g)} .$$

Теорема Пойа

Наконец, перечисляющий ряд $\Phi_{\pi_g}(t)$ для раскрасок всех циклов, которые перестановка π_g оставляет на месте, с одной стороны можно получить так:

$$\Phi_{\pi_g}(t) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k_i=0}^{\infty} q_{k_i} t^{i \cdot k_i} \right)^{\lambda_i(\pi_g)}.$$

С другой стороны, этот же перечисляющий ряд $\Phi_{\pi_g}(t)$ имеет вид

$$\Phi_{\pi_g}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\pi_g) t^k,$$

где $\varphi_k(\pi_g)$ — число раскрасок веса k , которые перестановка π_g оставляет на месте.



Теорема Пойа

Итак,

$$\Phi_{\pi_g}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\pi_g) t^k = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k_i=0}^{\infty} q_{k_i} t^{i \cdot t_{k_i}} \right)^{\lambda_i(\pi_g)}.$$

Заметим, что

$$\sum_{k_i=0}^{\infty} q_{k_i} t^{i \cdot t_{k_i}} = Q(t^i),$$

где $Q(t)$ — перечисляющий ряд для цветов.

Поэтому

$$\Phi_{\pi_g}(t) = \prod_{i=1}^n (Q(t^i))^{\lambda_i(\pi_g)}.$$

Теорема Пойа

3. Из равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\pi_g) t^k = \prod_{i=1}^n (Q(t^i))^{\lambda_i(\pi_g)}$$

получаем:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\pi_g) t^k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^n (Q(t^i))^{\lambda_i(\pi_g)}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_k(\pi_g) t^k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^n (Q(t^i))^{\lambda_i(\pi_g)}.$$

Теорема Пойа

Итак,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_k(\pi_g) t^k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^n (Q(t^i))^{\lambda_i(\pi_g)}.$$

Учитывая

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^n (Q(t^i))^{\lambda_i(\pi_g)} = Z_G(Q(t), Q(t^2), \dots, Q(t^n)),$$

получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_k(\pi_g) t^k = Z_G(Q(t), Q(t^2), \dots, Q(t^n)).$$

Теорема Пойа

Итак,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_k(\pi_g) t^k = Z_G(Q(t), Q(t^2), \dots, Q(t^n)).$$

3. Возвращаемся к равенству п. 1

$$\varphi_k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_k(\pi_g)$$

и находим:

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k = Z_G(Q(t), Q(t^2), \dots, Q(t^n)).$$



Примеры

Рассмотрим примеры подсчета раскрасок с ограничениями.

Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

Пример. Подсчитаем число различных ожерелий из 5-ти бусин **красного**, **синего** и *белого* цветов, в которых **ровно одна белая** бусина.

Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

Решение. Найдем цикловой индекс группы H_5 вращений правильного пятиугольника в плоскости:

$$Z_{H_5}(t_1, \dots, t_5) = \frac{1}{5}(t_1^5 + 4t_5).$$

Введем функцию весов цветов w :

$$w(\text{красный}) = w(\text{синий}) = 0, \quad w(\text{белый}) = 1.$$

Перечисляющий ряд для цветов имеет вид:

$$Q(t) = 2 + t.$$

По теореме Пойа

$$\Phi(t) = Z_{H_5}(Q(t), Q(t^2), Q(t^3), Q(t^4), Q(t^5)) = \frac{1}{5}((2+t)^5 + 4(2+t^5)).$$

Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

Но

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k,$$

где φ_k — число орбит раскрасок веса k .

Условию «**ровно одна белая бусина**» подходит φ_1 .

Поэтому в многочлене

$$\Phi(t) = \frac{1}{5}((2+t)^5 + 4(2+t^5))$$

надо найти коэффициент при t^1 .

Получаем: $\varphi_1 = \frac{1}{5} \cdot C_5^4 \cdot 2^4 = 16$.

Значит, найдется 16 ожерелий с одной *белой* бусиной.

Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

Пример. Подсчитаем число различных раскрасок граней правильного тетраэдра в **красный**, **синий** и **зеленый** цвета, при которых найдется не менее одной **красной** грани и не более одной **синей** грани.

Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

Решение. Найдем цикловой индекс группы G вращений правильного тетраэдра в пространстве:

$$Z_G(t_1, \dots, t_4) = \frac{1}{12}(t_1^4 + 8t_1t_3 + 3t_2^2).$$

Введем функцию весов цветов w :

$$w(\text{зеленый}) = 0, \quad w(\text{красный}) = 1, \quad w(\text{синий}) = 5.$$

Перечисляющий ряд для цветов имеет вид:

$$Q(t) = 1 + t + t^5.$$

По теореме Пойа

$$\Phi(t) = Z_G(Q(t), Q(t^2), Q(t^3), Q(t^4)),$$

т.е.

$$\Phi(t) = \frac{1}{12}((1+t+t^5)^4 + 8(1+t+t^5)(1+t^3+t^{15}) + 3(1+t^2+t^{10})^2).$$

Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

Но

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k,$$

где φ_k — число орбит раскрасок веса k .

Условию «не менее одной **красной** грани и не более одной **синей** грани» подходят $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ и $\varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$.

Поэтому в многочлене

$$\Phi(t) = \frac{1}{12}((1+t+t^5)^4 + 8(1+t+t^5)(1+t^3+t^{15}) + 3(1+t^2+t^{10})^2).$$

надо найти коэффициенты при $t^1, t^2, t^3, t^4, t^6, t^7, t^8$.

Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

Итак,

$$\Phi(t) = \frac{1}{12}((1+t+t^5)^4 + 8(1+t+t^5)(1+t^3+t^{15}) + 3(1+t^2+t^{10})^2),$$

и надо найти коэффициенты при $t^1, t^2, t^3, t^4, t^6, t^7, t^8$.

Получаем:

$$\begin{aligned}t^1 &: \frac{1}{12} \cdot (4 + 8 + 0) = 1, \\t^2 &: \frac{1}{12} \cdot (6 + 0 + 6) = 1, \\t^3 &: \frac{1}{12} \cdot (4 + 8 + 0) = 1, \\t^4 &: \frac{1}{12} \cdot (1 + 8 + 3) = 1, \\t^6 &: \frac{1}{12} \cdot (12 + 0 + 0) = 1, \\t^7 &: \frac{1}{12} \cdot (12 + 0 + 0) = 1, \\t^8 &: \frac{1}{12} \cdot (4 + 8 + 0) = 1.\end{aligned}$$

Значит, найдется 7 таких раскрасок тетраэдра.

Задачи для самостоятельного решения

1. [2] Гл. VIII 4.9–4.10.
2. По теореме Пойа найти число различных ожерелий из p бусин 2-х цветов, если p — простое число.
3. По теореме Пойа найти число различных ожерелий из 6-ти бусин красного, синего и белого цветов, в которых
 - 1) ровно две белые бусины;
 - 2) не менее двух белых бусин;
 - 3) не более двух белых бусин;
 - 4) две бусины белые и есть хотя бы одна красная бусина.
4. По теореме Пойа найти число раскрасок граней правильного тетраэдра
 - 1) в два цвета;
 - 2) в синий, красный и зеленый цвета так, что есть хотя бы одна грань каждого из цветов.

Литература к лекции

1. Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007. С. 57–61.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. С. 273–275.

Конец лекции