Лекция 9. Раскраски. Эквивалентность раскрасок относительно группы. Производящие функции. Перечисляющий ряд для цветов и перечисляющий ряд для раскрасок. Теорема Пойа. Примеры.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Подсчет числа ожерелий с ограничениями

Теорема Пойа позволяет подсчитать число ожерелий из n бусин m цветов.

Как найти число различных ожерелий из 5 бусин 3-х цветов — красного, синего и белого, в которых ровно одна белая бусина?

Или, как подсчитать число различных ожерелий из 7 бусин 3-х цветов — красного, синего и белого, в которых не менее 3-х красных бусин?

Ответ предлагает **общий случай теоремы Пойа**.

Производящие функции

Для последовательности чисел $\{a_k\}$ рассмотрим формальную сумму $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, где $t \in \mathbb{R}$.

Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ сходится в некоторой области $t \in D$, то в области D эта сумма определяет функцию

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

Эта функция называется **производящей функцией** для последовательности $\{a_k\}$.

Над производящими функциями определяются операции сложения, умножения и т.д. как соответствующие операции над соответствующими рядами.

Производящие функции

Если последовательность $\{a_k\}$ — **конечна**,

$$\{a_k\} = a_1, a_2, \dots, a_n,$$

то сумма $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$ является **многочленом** и **всегда** определяет производящую функцию

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k.$$

Как правило, мы будем рассматривать производящие функциии для конечных последовательностей.

Производящие функции

Например, конечная последовательность биномиальных коэффициентов

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n$$

определяет производящую функцию

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k = (t+1)^n.$$

Раскраски

Пусть конечная группа G действует на множестве $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множество цветов, и $f : N \to M$ — раскраска элементов из N в m цветов.

Множество всех раскрасок элементов из N в m цветов обозначается $R(N, M)$

Раскраски $f_1(x), f_2(x) \in R(N, M)$ **эквивалентны относительно группы** G ($f_1 \sim_G f_2$), если

$$\exists g \in G : \forall x \in N \; f_2(x) = f_1(\pi_g(x)).$$

Перечисляющий ряд для цветов

Пусть на множестве цветов M задана функция **весов** $w : M \to \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ — расширенный натуральный ряд.

Пусть q_k — число цветов веса k в множестве M.

Производящая функция

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k t^k$$

называется **перечисляющим рядом для цветов** (или **перечисляющим рядом для фигур**).

Отметим, что в сумме для $Q(t)$ только конечное число ненулевых слагаемых.

Перечисляющий ряд для цветов

Пример. Пусть $M = \{0, 1, 2\}$ — множество цветов и $w : M \to \mathbb{N}_0$ — функция весов,

i	$w(i)$
0	0
1	0
2	1

Тогда перечисляющий ряд для цветов имеет вид:

$$Q(t) = 2 + t.$$

Перечисляющий ряд для цветов

Пример. Пусть $M = \{0, 1, 2\}$ — множество цветов и $w : M \to \mathbb{N}_0$ — функция весов,

i	$w(i)$
0	1
1	3
2	0

Тогда перечисляющий ряд для цветов имеет вид:

$$Q(t) = 1 + t + t^3.$$

Вес раскраски

Вес раскраски $f(x) \in R(N, M)$ определяется как

$$w(f) = \sum_{x \in N} w(f(x)).$$

Если $f(x) \in R(N, M)$ — раскраска и $g \in G$, то

$$w(f(x)) = w(f(\pi_g(x))).$$

Вес раскраски

Пример. Пусть $M = \{0, 1, 2\}$ — множество цветов и $w : M \to \mathbb{N}_0$ — функция весов,

i	$w(i)$
0	0
1	0
2	1

Пусть $N = \{1, 2, 3\}$ — множество вершин правильного треугольника и $f : N \to M$ — раскраска,

x	1	2	3
$f(x)$	0	2	2

Тогда

$$w(f) = w(f(1)) + w(f(2)) + w(f(3)) = 2.$$

Вес орбиты раскраски

Если $f_1 \sim_G f_2$, то $w(f_1) = w(f_2)$.

Поэтому введем **вес орбиты** O_f как вес любого ее элемента. Т.е.

$$w(O_f) = w(f).$$

Перечисляющий ряд для раскрасок

Пусть φ_k — число орбит веса k в $R(N, M)$.

Производящая функция

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k$$

называется **перечисляющим рядом для раскрасок** (или **перечисляющим рядом для конфигураций**).

Отметим, что в сумме для $\Phi(t)$ также только конечное число ненулевых слагаемых.

Теорема Пойа (общий случай)

Рассмотрим общий случай **теоремы Пойа**.

Теорема 1 (Пойа). *Пусть конечная группа G действует на множестве $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, и $w : M \to \mathbb{N}_0$ — функция весов цветов из $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Тогда перечисляющий ряд для раскрасок $\Phi(t)$ равен*

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k = Z_G(t_1 = Q(t), \ldots, t_n = Q(t^n)),$$

где $Z_G(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} t_1^{\lambda_1(\pi_g)} \cdot \ldots \cdot t_n^{\lambda_n(\pi_g)}$ — цикловой индекс группы G при этом действии, а $Q(t)$ — перечисляющий ряд для цветов.

Теорема Пойа

Доказательство.
Итак, $w : M \to \mathbb{N}_0$ — функция весов цветов и пусть q_j — число цветов веса j из M.

Если $f(x)$ — раскраска из $R(N, M)$, то $w(f) = \sum\limits_{a \in N} w(f(a))$.

Отметим, что если $g \in G$, то $w(f(x)) = w(f(\pi_g(x)))$.

Теорема Пойа

Далее, перечисляющий ряд для раскрасок имеет вид:

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k,$$

где φ_k — число орбит раскрасок веса k.

1. Оценим φ_k.

Пусть $R_k = \{f_1, \ldots, f_l\}$ — все раскраски веса k.

Для каждого $g \in G$ построим соответствующую ему перестановку Π_g:

$$\Pi_g = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_l(x) \\ f_1(\pi_g(x)) & f_2(\pi_g(x)) & \ldots & f_l(\pi_g(x)) \end{pmatrix}.$$

Теорема Пойа

Положим
$$T_k = \{\Pi_g \mid g \in G\}.$$
Проверим, что $G_k = (T_k, \circ)$ является группой.

Свойства группы.
1) Ассоциативность операции $\circ$.
2) Существование нейтрального элемента: $\Pi_e \in G_k$, где e — нейтральный элемент в группе G.
3) Для каждого элемента $\Pi_g \in G_k$ существование обратного элемента: $\Pi_{g'} \in G_k$, где элемент g' симметричен к элементу g в группе G.

Теорема Пойа

Итак, $G_k = (T_k, \circ)$ — подгруппа симметрической группы перестановок $S(R_k)$.

Рассмотрим тождественное действие группы G_k на множестве R_k.

Т.е. если $\Pi_g \in G_k$, где $g \in G$, и $f(x) \in R_k$, то

$$\Pi_g(f(x)) = f(\pi_g(x)).$$

Теорема Пойа

Если $f_i, f_j \in R_k$, то f_i и f_j эквивалентны по группе G_k, если найдется $\Pi_g \in G_k$, где $g \in G$, что

$$\Pi_g(f_i(x)) = f_j(x),$$

т.е.

$$f_j(x) = f_i(\pi_g(x)).$$

Но это означает, что раскраски f_i и f_j эквивалентны по группе G.

Значит, для любых $f_i, f_j \in R_k$ верно

$$f_i \sim_G f_j \;\Leftrightarrow\; f_i \sim_{G_k} f_j.$$

Теорема Пойа

Следовательно, число орбит φ_k раскрасок веса k элементов множества N **совпадает** с числом орбит $N(G_k)$ элементов множества R_k по группе G_k, т.е.

$$\varphi_k = N(G_k).$$

По лемме Бернсайда

$$N(G_k) = \frac{1}{|G_k|}\sum_{g\in G}\lambda_1(\Pi_g).$$

Из $|G_k| = |G|$ получаем:

$$\varphi_k = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\lambda_1(\Pi_g).$$

Теорема Пойа

Число $\lambda_1(\Pi_g)$ раскрасок веса k, которые перестановка π_g, $g \in G$, оставляет на месте, обозначим через $\varphi_k(\pi_g)$.

2. Оценим $\varphi_k(\pi_g)$.

Лемма 2. *Справедливо равенство:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\pi_g) t^k = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k_i=0}^{\infty} q_{k_i} t^{i \cdot t_{k_i}} \right)^{\lambda_i(\pi_g)} ,$$

где q_j *— число цветов веса* j *из* M, *а*
$\lambda(\pi_g) = (\lambda_1(\pi_g), \ldots, \lambda_n(\pi_g))$ *— тип перестановки* π_g .

Теорема Пойа

Рассмотрим раскраски $f(x) \in R(N, M)$, которые перестановка π_g, $g \in G$, оставляет на месте, т.е

$$f(x) = f(\pi_g(x)).$$

Если $f(x) \in R(N, M)$, то по лемме 1 для $f(x) = f(\pi_g(x))$ необходимо и достаточно, чтобы все элементы каждого цикла перестановки π_g были окрашены в один и тот же цвет.

Напомним, что $\lambda(\pi_g) = (\lambda_1(\pi_g), \ldots, \lambda_n(\pi_g))$ — тип перестаноки π_g.

Теорема Пойа

Рассмотрим произвольный цикл C длины i перестановки π_g.

Перечисляющий ряд $\Phi_{\pi_g,C}(t)$ для раскрасок цикла C, которые перестановка π_g оставляет на месте, имеет вид:

$$\Phi_{\pi_g,C}(t) = \sum_{k_i=0}^{\infty} q_{k_i} t^{i \cdot k_i}.$$

Почему?

Для любой раскраски $f(x)$, которая все элементы цикла C красит в цвет веса k_i, ее вес $f(C)$ по циклу C равен:

$$w(f(C)) = \sum_{a \in C} w(f(a)) = i \cdot k_i.$$

Кроме того, найдется ровно q_{k_i} цветов веса k_i из M.

Теорема Пойа

Далле, все циклы перестановки π_g можно красить независимо друг от друга.

Поэтому перечисляющий ряд $\Phi_{\pi_g,i}(t)$ для раскрасок всех циклов длины i, которые перестановка π_g оставляет на месте, можно получить так:

$$\Phi_{\pi_g,i}(t) = \left(\sum_{k_i=0}^{\infty} q_{k_i} t^{i \cdot k_i} \right)^{\lambda_i(\pi_g)} .$$

Теорема Пойа

Наконец, перечисляющий ряд $\Phi_{\pi_g}(t)$ для раскрасок всех циклов, которые перестановка π_g оставляет на месте, с одной стороны можно получить так:

$$\Phi_{\pi_g}(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k_i=0}^{\infty} q_{k_i} t^{i \cdot t_{k_i}} \right)^{\lambda_i(\pi_g)} .$$

С другой стороны, этот же перечисляющий ряд $\Phi_{\pi_g}(t)$ имеет вид

$$\Phi_{\pi_g}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\pi_g) t^k,$$

где $\varphi_k(\pi_g)$ — число раскрасок веса k, которые перестановка π_g оставляет на месте.

$\square$

Теорема Пойа

Итак,

$$\Phi_{\pi_g}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\pi_g) t^k = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k_i=0}^{\infty} q_{k_i} t^{i \cdot t_{k_i}} \right)^{\lambda_i(\pi_g)} .$$

Заметим, что

$$\sum_{k_i=0}^{\infty} q_{k_i} t^{i \cdot t_{k_i}} = Q(t^i),$$

где $Q(t)$ — перечисляющий ряд для цветов.

Поэтому

$$\Phi_{\pi_g}(t) = \prod_{i=1}^{n} (Q(t^i))^{\lambda_i(\pi_g)}.$$

Теорема Пойа

3. Из равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\pi_g) t^k = \prod_{i=1}^{n} \left(Q(t^i)\right)^{\lambda_i(\pi_g)}$$

получаем:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\pi_g) t^k = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \prod_{i=1}^{n} \left(Q(t^i)\right)^{\lambda_i(\pi_g)}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \varphi_k(\pi_g) t^k = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \prod_{i=1}^{n} \left(Q(t^i)\right)^{\lambda_i(\pi_g)}.$$

Теорема Пойа

Итак,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_k(\pi_g) t^k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^{n} \left(Q(t^i)\right)^{\lambda_i(\pi_g)}.$$

Учитывая

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^{n} \left(Q(t^i)\right)^{\lambda_i(\pi_g)} = Z_G(Q(t), Q(t^2), \ldots, Q(t^n)),$$

получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_k(\pi_g) t^k = Z_G(Q(t), Q(t^2), \ldots, Q(t^n)).$$

Теорема Пойа

Итак,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_k(\pi_g) t^k = Z_G(Q(t), Q(t^2), \ldots, Q(t^n)).$$

3. Возвращаемся к равенству п. 1

$$\varphi_k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_k(\pi_g)$$

и находим:

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k = Z_G(Q(t), Q(t^2), \ldots, Q(t^n)).$$

$\square$

Примеры

Рассмотрим примеры подсчета раскрасок с ограничениями.

Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

Пример. Подсчитаем число различных ожерелий из 5-ти бусин красного, синего и *белого* цветов, в которых **ровно одна** *белая* бусина.

Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

Решение. Найдем цикловой индекс группы H_5 вращений правильного пятиугольника в плоскости:

$$Z_{H_5}(t_1, \ldots, t_5) = \frac{1}{5}(t_1^5 + 4t_5).$$

Введем функцию весов цветов w:

$$w(\text{красный}) = w(\text{синий}) = 0, \;\; w(\textit{белый}) = 1.$$

Перечисляющий ряд для цветов имеет вид:

$$Q(t) = 2 + t.$$

По теореме Пойа

$$\Phi(t) = Z_{H_5}(Q(t), Q(t^2), Q(t^3), Q(t^4), Q(t^5)) = \frac{1}{5}((2+t)^5 + 4(2+t^5)).$$

Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

Но

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k,$$

где φ_k — число орбит раскрасок веса k.

Условию «**ровно одна** *белая* бусина» подходит φ_1.

Поэтому в многочлене

$$\Phi(t) = \frac{1}{5}((2+t)^5 + 4(2+t^5))$$

надо найти коэффициент при t^1.

Получаем: $\varphi_1 = \frac{1}{5} \cdot C_5^4 \cdot 2^4 = 16$.

Значит, найдется 16 ожерелий с одной *белой* бусиной.

Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

Пример. Подсчитаем число различных раскрасок граней правильного тетраэдра в красный, синий и зеленый цвета, при которых найдется не менее одной красной грани и не более одной синей грани.

Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

Решение. Найдем цикловой индекс группы G вращений правильного тетраэдра в пространстве:

$$Z_G(t_1, \ldots, t_4) = \frac{1}{12}(t_1^4 + 8t_1 t_3 + 3t_2^2).$$

Введем функцию весов цветов w:

$$w(\text{зеленый}) = 0, \;\; w(\text{красный}) = 1, \;\; w(\text{синий}) = 5.$$

Перечисляющий ряд для цветов имеет вид:

$$Q(t) = 1 + t + t^5.$$

По теореме Пойа

$$\Phi(t) = Z_G(Q(t), Q(t^2), Q(t^3), Q(t^4)),$$

т.е.

$$\Phi(t) = \frac{1}{12}((1+t+t^5)^4+8(1+t+t^5)(1+t^3+t^{15})+3(1+t^2+t^{10})^2).$$

Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

Но
$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k,$$
где φ_k — число орбит раскрасок веса k.

Условию «не менее одной красной грани и не более одной синей грани» подходят $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ и $\varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$.
Поэтому в многочлене

$$\Phi(t) = \frac{1}{12}((1+t+t^5)^4+8(1+t+t^5)(1+t^3+t^{15})+3(1+t^2+t^{10})^2).$$

надо найти коэффициенты при $t^1, t^2, t^3, t^4, t^6, t^7, t^8$.

Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

Итак,

$$\Phi(t) = \frac{1}{12}((1+t+t^5)^4+8(1+t+t^5)(1+t^3+t^{15})+3(1+t^2+t^{10})^2),$$

и надо найти коэффициенты при $t^1, t^2, t^3, t^4, t^6, t^7, t^8$.
Получаем:

$$\begin{array}{ll}
t^1: & \frac{1}{12}\cdot(4+8+0) = 1, \\
t^2: & \frac{1}{12}\cdot(6+0+6) = 1, \\
t^3: & \frac{1}{12}\cdot(4+8+0) = 1, \\
t^4: & \frac{1}{12}\cdot(1+8+3) = 1, \\
t^6: & \frac{1}{12}\cdot(12+0+0) = 1, \\
t^7: & \frac{1}{12}\cdot(12+0+0) = 1, \\
t^8: & \frac{1}{12}\cdot(4+8+0) = 1.
\end{array}$$

Значит, найдется 7 таких раскрасок тетраэдра.

Задачи для самостоятельного решения

1. [2] Гл. VIII 4.9–4.10.

2. По теореме Пойа найти число различных ожерелий из p бусин 2-х цветов, если p — простое число.

3. По теореме Пойа найти число различных ожерелий из 6-ти бусин красного, синего и белого цветов, в которых
1) ровно две белые бусины;
2) не менее двух белых бусин;
3) не более двух белых бусин;
4) две бусины белые и есть хотя бы одна красная бусина.

4. По теореме Пойа найти число раскрасок граней правильного тетраэдра
1) в два цвета;
2) в синий, красный и зеленый цвета так, что есть хотя бы одна грань каждого из цветов.

Литература к лекции

1. Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007. С. 57–61.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. С. 273–275.

Конец лекции