Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 29

Натуральное исчисление высказываний:
правило монотонности,
закон исключённого третьего,
корректность

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Правило монотонности в НИВ (утверждение)

Если секвенция $\Gamma \vdash A$ доказуема в НИВ, то для любого множества формул Δ секвенция $\Gamma \cup \Delta \vdash A$ также доказуема в НИВ

Доказательство.

Рассмотрим призвольное доказательство $\mathcal{D}$ секвенции $\Gamma \vdash A$:

$$\Gamma_1 \vdash B_1, \quad \Gamma_2 \vdash B_2, \quad \ldots, \quad \Gamma_n \vdash B_n \qquad (\Gamma_n = \Gamma;\ B_n = A)$$

Добавив Δ к левым частям, получим из $\mathcal{D}$ последовательность $\mathcal{D}'$:

$$\Gamma_1 \cup \Delta \vdash B_1, \quad \Gamma_2 \cup \Delta \vdash B_2, \quad \ldots, \quad \Gamma_n \cup \Delta \vdash B_n$$

Если $\Gamma_i \vdash B_i$ — аксиома, то $\Gamma_i \cup \Delta \vdash B_i$ — тоже аксиома

Если $\Gamma_i \vdash B_i$ выводится из $\Gamma_{j_1} \vdash B_{j_1}, \ldots, \Gamma_{j_k} \vdash B_{j_k}$ по правилу R НИВ, то $\Gamma_i \cup \Delta \vdash B_i$ выводится из $\Gamma_{j_1} \cup \Delta \vdash B_{j_1}, \ldots, \Gamma_{j_k} \cup \Delta \vdash B_{j_k}$ по правилу R

Значит, $\mathcal{D}'$ — доказательство секвенции $\Gamma \cup \Delta \vdash A$ в НИВ ▼

Правило монотонности иногда включается в НИВ как правило вывода

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \cup \Delta \vdash A}$$

Закон исключённого третьего в НИВ (утверждение)

Любая секвенция вида $\Gamma \vdash A \vee \neg A$ доказуема в НИВ

Доказательство.

По правилу монотонности,
достаточно предложить доказательство секвенции $\vdash A \vee \neg A$

Например, такое:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \\
R_{\vee}^{+}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_{\neg}^{+}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \\
R_{\vee}^{+}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_{\neg}^{+}: & \vdash \neg\neg(A \vee \neg A) \\
R_{\neg}^{-}: & \vdash A \vee \neg A
\end{array}
\qquad \blacktriangledown
$$

Закон исключённого третьего иногда включается в НИВ как аксиома

$$\Gamma \vdash A \vee \neg A$$

Содержательная трактовка доказательств НИВ

$$\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \\
R_{\vee}^{+}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_{\neg}^{+}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \\
R_{\vee}^{+}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_{\neg}^{+}: & \vdash \neg\neg(A \vee \neg A) \\
R_{\neg}^{-}: & \vdash A \vee \neg A
\end{array}$$

Попробуем перевести это доказательство в НИВ на естественный язык:

$R_{\neg}^{-}$: $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$ $\vdash A \vee \neg A$	Чтобы показать, что $A \vee \neg A$ верно, достаточно показать, что $\neg(A \vee \neg A)$ неверно
$R_{\neg}^{+}$: $\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A$ $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)$ $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$	Покажем это от противного: предположим, что $\neg(A \vee \neg A)$ верно; покажем, что $A \vee \neg A$ и верно, и неверно
$\mathfrak{A}$: $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)$	«$A \vee \neg A$ неверно» верно по предположению
$R_{\vee}^{+}$: $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$ $\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A$	«$A \vee \neg A$ верно»: достаточно показать, что A неверно (то есть $\neg A$ верно)

Содержательная трактовка доказательств НИВ

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & \neg(A\vee\neg A), A\vdash A \\
R_{\vee}^{+}: & \neg(A\vee\neg A), A\vdash A\vee\neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A\vee\neg A), A\vdash \neg(A\vee\neg A) \\
R_{\neg}^{+}: & \neg(A\vee\neg A)\vdash \neg A \\
R_{\vee}^{+}: & \neg(A\vee\neg A)\vdash A\vee\neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A\vee\neg A)\vdash \neg(A\vee\neg A) \\
R_{\neg}^{+}: & \vdash \neg\neg(A\vee\neg A) \\
R_{\neg}^{-}: & \vdash A\vee\neg A
\end{array}
$$

Попробуем перевести это доказательство в НИВ на естественный язык:

$R_{\neg}^{+}$: $\neg(A\vee\neg A), A\vdash A\vee\neg A$; $\neg(A\vee\neg A), A\vdash\neg(A\vee\neg A)$; $\neg(A\vee\neg A)\vdash\neg A$	Покажем это от противного: предположим, что A верно; покажем, что $A\vee\neg A$ и верно, и неверно
$\mathfrak{A}$: $\neg(A\vee\neg A), A\vdash\neg(A\vee\neg A)$	«$A\vee\neg A$ неверно» верно по предположению
$R_{\vee}^{+}$: $\neg(A\vee\neg A), A\vdash A$; $\neg(A\vee\neg A), A\vdash A\vee\neg A$	«$A\vee\neg A$ верно»: достаточно показать, что A верно
$\mathfrak{A}$: $\neg(A\vee\neg A), A\vdash A$	A верно по предположению

Содержательная трактовка доказательств НИВ

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \\
R_{\vee}^{+}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_{\neg}^{+}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \\
R_{\vee}^{+}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A \\
\mathfrak{A}: & \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A) \\
R_{\neg}^{+}: & \vdash \neg\neg(A \vee \neg A) \\
R_{\neg}^{-}: & \vdash A \vee \neg A
\end{array}
$$

Попробуем перевести это доказательство в НИВ на естественный язык:

Доказательство.

Предположим, что верно $\neg(A \vee \neg A)$

Дополнительно предположим, что верно A

Так как верно A, то верно и $A \vee \neg A$

Это противоречит предположению $\neg(A \vee \neg A)$, а значит, A неверно

Тогда верно $A \vee \neg A$

Это противоречит предположению $\neg(A \vee \neg A)$,
а значит, $\neg(A \vee \neg A)$ неверно

Следовательно, верно $A \vee \neg A$ ▼

Теорема о корректности НИВ

Любая формула, доказуемая в НИВ, общезначима

Доказательство.

По устройству правил НИВ, левая часть Γ любой секвенции $\Gamma \vdash \psi$ любого доказательства формулы φ конечна

Каждой секвенции σ вида $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\} \vdash \chi$ сопоставим формулу $\varphi_\sigma = \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \chi$

По определению доказательства в НИВ, достаточно показать следующее:

1. Если σ — аксиома с конечной левой частью, то формула $\models \varphi_\sigma$ общезначима
2. Если σ — секвенция с конечной левой частью, получающаяся из $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ по какому-либо из правил НИВ, и формулы $\varphi_{\sigma_1}, \ldots, \varphi_{\sigma_n}$ общезначимы, то и формула φ_σ общезначима

Теорема о корректности НИВ

Любая формула, доказуемая в НИВ, общезначима

Доказательство.

1. Формула φ_σ, сопоставленная аксиоме σ с конечной левой частью, устроена так:

$$\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \psi_i, \qquad \text{где } 1 \le i \le k$$

По определению общезначимости, достаточно показать, что для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \models \varphi_\sigma$

Если $\mathcal{I} \models \psi_i$, то по семантике $\to$ верно и $\mathcal{I} \models \varphi_\sigma$

Иначе $\mathcal{I} \not\models \psi_i$, и по семантике $\&$ и $\to$ всё равно верно $\mathcal{I} \models \varphi_\sigma$

2. Рассмотрим только правило рассуждения от противного (обоснования для остальных правил аналогичны)

Согласно этому правилу, требуется показать, что если формулы $\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \,\&\, A \to B$ и $\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \,\&\, A \to \neg B$ общезначимы, то и формула $\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \neg A$ общезначима

Теорема о корректности НИВ

Любая формула, доказуемая в НИВ, общезначима

Доказательство.

2. $\chi_1 = \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \,\&\, A \to B$, $\quad \chi_2 = \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \,\&\, A \to \neg B$,

$\chi_3 = \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \neg A$; $\quad \models \chi_1$ и $\models \chi_2 \Rightarrow \models \chi_3$?

Пусть формулы χ_1 и χ_2 общезначимы

По определению общезначимости, достаточно показать, что для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \models \chi_3$

По общезначимости формул χ_1 и χ_2, верно $\mathcal{I} \models \chi_1$ и $\mathcal{I} \models \chi_2$

По семантике $\to$ и устройству формул χ_1, χ_2, верно

$$\mathcal{I} \not\models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \,\&\, A$$

По семантике $\neg$, верно $\mathcal{I} \models \neg(\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \,\&\, A)$

При этом (очевидно, что)

$$\mathcal{I} \models \neg(\psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \,\&\, A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \neg A$$

Значит, $\mathcal{I} \models \chi_3$ ▼