

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 29

Натуральное исчисление высказываний:
правило сечения,
правило полного перебора,
правило приведения к абсурду,
полнота

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

Утверждение о совмещении выводов

Если секвенции $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ доказуемы в НИВ
и из множества $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ выводима секвенция σ ,
то σ доказуема в НИВ

Доказательство.

Рассмотрим доказательства $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ секвенций $\sigma_1, \dots, \sigma_n$,
вывод \mathcal{D} секвенции σ из $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ и последовательность секвенций \mathcal{D}' :

$$\mathcal{D}_1 \quad \dots \quad \mathcal{D}_n \quad \mathcal{D}$$

Каждая секвенция \mathcal{D}_i — аксиома или получается по какому-либо
правилу вывода из записанных ранее в \mathcal{D}_i

В части \mathcal{D} всё устроено так же, и сверх этого в произвольных местах
могут быть записаны секвенции $\sigma_1, \dots, \sigma_n$

При этом σ_i — последняя секвенция части \mathcal{D}_i ,
а значит, является аксиомой или получается по какому-либо
правилу вывода из секвенций части \mathcal{D}_i

Следовательно, $\mathcal{D}_1 \dots \mathcal{D}_n \mathcal{D}$ — доказательство секвенции σ ▼

Правило сечения (утверждение)

Если секвенции $\Gamma \vdash A_1, \dots, \Gamma \vdash A_n$ и $\{A_1, \dots, A_n\} \vdash B$ доказуемы в НИВ, то доказуема и секвенция $\Gamma \vdash B$

Доказательство.

Положим, что секвенции $\Gamma \vdash A_1, \dots, \Gamma \vdash A_n$ и $\{A_1, \dots, A_n\} \vdash B$ доказуемы

По *правилу дедукции* (R_{\rightarrow}^+) и доказуемости $\{A_1, \dots, A_n\} \vdash B$, доказуема секвенция $\vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \dots)$

По *правилу монотонности*,

доказуема секвенция $\Gamma \vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \dots))$

По *правилу отделения*, из множества секвенций

$$\{\Gamma \vdash A_1, \dots, \Gamma \vdash A_n, \Gamma \vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \dots))\}$$

выводима секвенция $\Gamma \vdash B$

По *утверждению о совмещении выводов*, доказуема секвенция $\Gamma \vdash B$ ▼

Правило сечения иногда включается в НИВ как семейство правил вывода

$$\frac{\Gamma \vdash A_1, \dots, \Gamma \vdash A_n, \{A_1, \dots, A_n\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\Gamma \vdash B$$

(по одному для каждого натурального n)

Правило полного перебора (утверждение)

Если секвенции $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ и $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B$ доказуемы в НИВ, то доказуема и секвенция $\Gamma \vdash B$

Доказательство.

Положим, что секвенции $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ и $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B$ доказуемы

По *закону исключённого третьего*, доказуема секвенция $\Gamma \vdash A \vee \neg A$

По *правилу разбора случаев*, из множества секвенций

$$\{\Gamma \cup \{A\} \vdash B, \quad \Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B, \quad \Gamma \vdash A \vee \neg A\}$$

выводима секвенция $\Gamma \vdash B$

По *утверждению о совмещении выводов*, доказуема секвенция $\Gamma \vdash B$ ▼

Правило полного перебора иногда включается в НИВ как правило вывода

$$\frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B, \Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Правило приведения к абсурду (утверждение)

Если секвенции $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$ доказуемы в НИВ,
то для любой формулы B доказуема и секвенция $\Gamma \vdash B$

Доказательство.

Положим, что секвенции $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$ доказуемы

По *правилу монотонности*,
доказуемы секвенции $\Gamma \cup \{\neg B\} \vdash A$ и $\Gamma \cup \{\neg B\} \vdash \neg A$

По *правилу рассуждения от противного*,
доказуема секвенция $\Gamma \vdash \neg\neg B$

По *правилу снятия двойного отрицания*,
доказуема секвенция $\Gamma \vdash B$ ▼

Правило приведения к абсурду
иногда включается в НИВ как правило вывода

$$R_a: \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$

Это правило вывода будет использоваться в обосновании полноты НИВ

Лемма о выводе связок

Для любых формул A, B в НИВ доказуемы следующие секвенции:

$$\begin{array}{llll} A, B \vdash A \& B & \neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) & A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B) \\ \neg A \vdash \neg(A \& B) & A \vdash A \vee B & \neg A \vdash A \rightarrow B & A \vdash \neg\neg A \\ \neg B \vdash \neg(A \& B) & B \vdash A \vee B & B \vdash A \rightarrow B & \end{array}$$

Доказательство.

$A, B \vdash A \& B$:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}: \\ \mathfrak{A}: \\ R_{\&}^+: \end{array} \left(\begin{array}{l} A, B \vdash A \\ A, B \vdash B \\ A, B \vdash A \& B \end{array} \right)$$

$A \vdash A \vee B, B \vdash A \vee B$ — аналогично

$\neg A \vdash \neg(A \& B)$:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}: \\ \mathfrak{A}: \\ R_{\&}^{-1}: \\ R_{\neg}^+: \end{array} \left(\begin{array}{l} \neg A, A \& B \vdash \neg A \\ \neg A, A \& B \vdash A \& B \\ \neg A, A \& B \vdash A \\ \neg A \vdash \neg(A \& B) \end{array} \right)$$

$\neg B \vdash \neg(A \& B)$ — аналогично

Лемма о выводе связок

Для любых формул A, B в НИВ доказуемы следующие секвенции:

$$\begin{array}{llll} A, B \vdash A \& B & \neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) & A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B) \\ \neg A \vdash \neg(A \& B) & A \vdash A \vee B & \neg A \vdash A \rightarrow B & A \vdash \neg\neg A \\ \neg B \vdash \neg(A \& B) & B \vdash A \vee B & B \vdash A \rightarrow B & \end{array}$$

Доказательство.

$A \vdash \neg\neg A$:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}: \\ \mathfrak{A}: \\ R_{\neg}^{\vdash}: \end{array} \left(\begin{array}{l} A, \neg A \vdash A \\ A, \neg A \vdash \neg A \\ A \vdash \neg\neg A \end{array} \right)$$

$B \vdash A \rightarrow B$:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}: \\ R_{\rightarrow}^{\vdash}: \end{array} \left(\begin{array}{l} B, A \vdash B \\ B \vdash A \rightarrow B \end{array} \right)$$

Лемма о выводе связок

Для любых формул A, B в НИВ доказуемы следующие секвенции:

$$\begin{array}{llll} A, B \vdash A \& B & \neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) & A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B) \\ \neg A \vdash \neg(A \& B) & A \vdash A \vee B & \neg A \vdash A \rightarrow B & A \vdash \neg\neg A \\ \neg B \vdash \neg(A \& B) & B \vdash A \vee B & B \vdash A \rightarrow B & \end{array}$$

Доказательство.

$\neg A \vdash A \rightarrow B$:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}: \\ \mathfrak{A}: \\ R_a: \\ R_{\rightarrow}^+: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \neg A, A \vdash A \\ \neg A, A \vdash \neg A \\ \neg A, A \vdash B \\ \neg A \vdash A \rightarrow B \end{array} \right.$$

$A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}: \\ \mathfrak{A}: \\ \mathfrak{A}: \\ R_{\rightarrow}^-: \\ R_{\neg}^+: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A, \neg B, A \rightarrow B \vdash \neg B \\ A, \neg B, A \rightarrow B \vdash A \\ A, \neg B, A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B \\ A, \neg B, A \rightarrow B \vdash B \\ A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B) \end{array} \right.$$

Лемма о выводе связок

Для любых формул A, B в НИВ доказуемы следующие секвенции:

$$\begin{array}{llll} A, B \vdash A \& B & \neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) & A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B) \\ \neg A \vdash \neg(A \& B) & A \vdash A \vee B & \neg A \vdash A \rightarrow B & A \vdash \neg\neg A \\ \neg B \vdash \neg(A \& B) & B \vdash A \vee B & B \vdash A \rightarrow B & \end{array}$$

Доказательство.

$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}: \quad \neg A, \neg B, A \vee B, A \vdash A \\ \mathfrak{A}: \quad \neg A, \neg B, A \vee B, B \vdash B \\ \mathfrak{A}: \quad \neg A, \neg B, A \vee B, B \vdash \neg B \\ R_a: \quad \neg A, \neg B, A \vee B, B \vdash A \\ \mathfrak{A}: \quad \neg A, \neg B, A \vee B, \vdash A \vee B \\ R_{\neg}: \quad \neg A, \neg B, A \vee B \vdash A \\ \mathfrak{A}: \quad \neg A, \neg B, A \vee B \vdash \neg A \\ R_{\neg}^+: \quad \neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B) \quad \blacktriangledown \end{array}$$

Основная лемма

Для любой формулы $\varphi(\tilde{x}^n)$ и любой интерпретации \mathcal{I} в НИВ доказуема секвенция $x_1^{\mathcal{I}(x_1)}, \dots, x_n^{\mathcal{I}(x_n)} \vdash \varphi^{\mathcal{I}(\varphi)}$

$$\varphi^{\mathfrak{t}} = \varphi; \quad \varphi^{\mathfrak{f}} = \neg\varphi;$$

$\varphi(\tilde{x}^n)$ — формула, содержащая только переменные \tilde{x}^n

Доказательство (индукцией по структуре формулы).

База индукции: $x_1^{\mathcal{I}(x_1)}, \dots, x_n^{\mathcal{I}(x_n)} \vdash x_i^{\mathcal{I}(x_i)}$ — это аксиома исчисления

Индуктивный шаг: подробно разберём только случай $\varphi = \psi \& \chi$
(остальные случаи аналогичны)

По *лемме о выводе связок и правилу монотонности*,
доказуемо $\psi^{\mathcal{I}(\psi)}, \chi^{\mathcal{I}(\chi)} \vdash (\psi \& \chi)^{\mathcal{I}(\varphi)}$

По *предположению индукции*,
доказуемо $x_1^{\mathcal{I}(x_1)}, \dots, x_n^{\mathcal{I}(x_n)} \vdash \psi^{\mathcal{I}(\psi)}$ и $x_1^{\mathcal{I}(x_1)}, \dots, x_n^{\mathcal{I}(x_n)} \vdash \chi^{\mathcal{I}(\chi)}$

По *правилу сечения*, доказуемо и $x_1^{\mathcal{I}(x_1)}, \dots, x_n^{\mathcal{I}(x_n)} \vdash \varphi^{\mathcal{I}(\varphi)} \blacktriangledown$

Теорема о полноте НИВ

Для любой общезначимой формулы φ
секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИВ

Доказательство.

Пусть x_1, \dots, x_n — все переменные формулы φ

По *основной лемме*,

для любого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}^n$ доказуема секвенция

$$x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n} \vdash \varphi$$

По *правилу полного перебора*, доказуемы и секвенции

▶ $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_{n-2}^{\alpha_{n-2}}, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \vdash \varphi$

▶ $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_{n-2}^{\alpha_{n-2}} \vdash \varphi$

▶ ...

▶ $x_1^{\alpha_1} \vdash \varphi$

▶ $\vdash \varphi$ ▼