

# Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы  
→ Математические методы верификации схем и программ

## Блок 15

Автоматы Бюхи  
Обобщённые автоматы Бюхи

Лектор:  
**Подымов Владислав Васильевич**  
E-mail:  
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

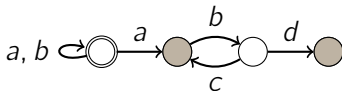
# Автоматы Бюхи

**Автомат Бюхи** над алфавитом  $\Sigma$  — это система  $A = (S, S_0, \rightarrow, F)$ , где:

- ▶  $S$  — конечное множество **состояний**
- ▶  $S_0 \subseteq S$  — множество **начальных** состояний
- ▶  $\rightarrow \subseteq S \times \Sigma \times S$  — отношение **переходов**
  - ▶ Изображение семейства переходов  $(s, x, s'), (s, y, s'), \dots: s \xrightarrow{x, y, \dots} s'$
- ▶  $F \subseteq S$  — множество **допускающих** состояний

Как и для моделей Крипке, для автоматов будут применяться терминология и обозначения из теории графов

**Пример:**



- — состояние
- — начальное состояние
- — допускающее состояние

# Автоматы Бюхи

В записи слов и  $\omega$ -слов будем опускать разделители:

$$\langle\langle x_1, x_2, x_3, \dots \rangle\rangle = \langle\langle x_1 x_2 x_3 \dots \rangle\rangle$$

Будем говорить, что бесконечный путь

$$s_1 \xrightarrow{x_1} s_2 \xrightarrow{x_2} s_3 \xrightarrow{x_3} \dots$$

в автомате Бюхи **порождается**  $\omega$ -словом  $x_1 x_2 x_3 \dots$

**Вычисление** автомата Бюхи — это бесконечный путь, исходящий из начального состояния

$\text{Tr}(A, w)$  — множество всех вычислений  $A$ , порождающихся  $\omega$ -словом  $w$

$\text{inf}(\rho)$  — множество всех состояний, встречающихся бесконечно часто в бесконечном пути  $\rho$

# Автоматы Бюхи

Вычисление  $\rho$  автомата Бюхи  $A = (S, S_0, \rightarrow, F)$  **успешно** (является **принимающим**), если хотя бы одно допускающее состояние повторяется в нём бесконечно часто

$$(\inf(\rho) \cap F \neq \emptyset)$$

$\omega$ -слово  $w$  **принимается** автоматом Бюхи  $A$ , если  $A$  содержит хотя бы одно успешное вычисление, порождаемое этим словом

$$(\exists \rho \in \text{Tr}(A, w) : \inf(\rho) \cap F \neq \emptyset)$$

**Языком** и  **$\omega$ -языком** над заданным алфавитом будем называть соответственно множество слов и множество  $\omega$ -слов

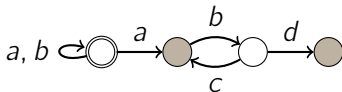
$L(A)$  — так будет обозначаться  $\omega$ -язык, **распознающийся** автоматом  $A$  (или, более коротко, —  **$\omega$ -язык автомата  $A$** ):

множество всех  $\omega$ -слов, принимаемых автоматом  $A$

# Автоматы Бюхи

## Пример

Автоматом Бюхи  $A$



распознаётся  $\omega$ -язык

$$L(A) = \{Wabcbcbcb \dots bc \dots \mid W \in \{a, b\}^*\}$$

На некоторых этапах автоматного алгоритма *удобно и естественно* будет строить автоматы в *более общего* вида, в котором у автомата может быть более одного допускающего множества

# Обобщённые автоматы Бюхи

Обобщённый автомат Бюхи над алфавитом  $\Sigma$  — это система  $GA = (S, S_0, \rightarrow, \mathcal{F})$ , где:

- ▶  $S, S_0$  и  $\rightarrow$  — такие же множества состояний, начальных состояний и переходов, что и в автомате Бюхи
- ▶  $\mathcal{F} \subseteq 2^S$  — семейство допускающих множеств состояний

Все понятия, введённые для автоматов Бюхи, кроме успешного вычисления, дословно переносятся на обобщённые автоматы

Вычисление  $\rho$  обобщённого автомата Бюхи  $GA$  успешно, если в **каждом** допускающем множестве есть хотя бы одно состояние, повторяющееся в  $\rho$  бесконечно часто

$$(\forall F \in \mathcal{F} : \text{inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset)$$

Формульная запись того, что

слово  $w$  принимается автоматом  $A = (S, S_0, \rightarrow, \mathcal{F})$ , выглядит так:

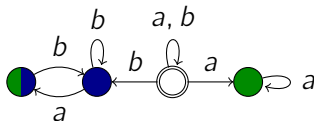
$$\exists \rho \in \text{Tr}(A, w) : \forall F \in \mathcal{F} : \text{inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset$$

# Обобщённые автоматы Бюхи

Далее состояния, принадлежащие одному допускающему множеству, изображаются как окрашенные в один (не белый) цвет

Если вершина принадлежит нескольким принимающим множествам, то она окрашивается во все соответствующие цвета

## Пример



Успешное вычисление этого автомата — это вычисление, в котором бесконечно часто повторяются

хотя бы одна синяя вершина и хотя бы одна зелёная вершина

Этим автоматом распознаётся множество всех  $\omega$ -слов вида  $WbU$ , где

- ▶  $W \in \{a, b\}^*$  и
- ▶  $U$  — любое  $\omega$ -слово над  $\{a, b\}$ , содержащее бесконечно много « $a$ », но ни одного « $aa$ »

# Обобщённые автоматы Бюхи

Автомат Бюхи  $A = (S', S'_0, \mapsto, F)$  назовём **разобобщением** обобщённого автомата Бюхи  $GA = (S, S_0, \rightarrow, \mathcal{F})$ , если он устроен так:

- ▶ Произвольно упорядочим допускающие множества  $GA$ :

$$\mathcal{F} = \{F_0, \dots, F_{k-1}\}$$

- ▶  $S' = S \times \{0, 1, \dots, k-1\}$

- ▶  $S'_0 = S_0 \times \{0\}$

- ▶  $F = \{(s, i) \mid s \in F_i, i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$

- ▶ Для каждого перехода  $(s \xrightarrow{x} s') \in \rightarrow$  и каждого  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  в  $\mapsto$  включаются следующие переходы (и только такие переходы):

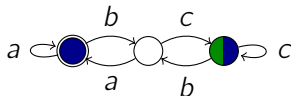
- ▶ если  $(s, i) \notin F$ , то  $(s, i) \xrightarrow{x} (s', i)$
- ▶ иначе  $(s, i) \xrightarrow{x} (s', (i+1) \bmod k)$



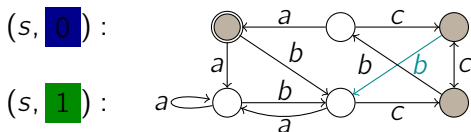
# Обобщённые автоматы Бюхи

## Пример

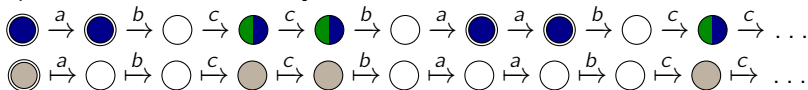
Для обобщённого автомата Бюхи  $GA$



с порядком допускающих множеств (синее, зелёное) соответствует такое разобобщение  $A$ :



Пример взаимно соответствующих вычислений этих автоматов:



# Теорема о разобобщении автомата Бюхи

Для любого обобщённого автомата Бюхи  $GA$   
и любого его разобобщения  $A$  верно  $L(A) = L(GA)$

Доказательство ( $L(A) \subseteq L(GA)$ )

Для определённости положим, что

$GA = (S, S_0, \rightarrow, \{F_0, \dots, F_{k-1}\})$  и  $A = (S', S'_0, \mapsto, F)$

Рассмотрим произвольное  $\omega$ -слово  $w \in L(A)$

В  $A$  существует успешное вычисление  $\rho$  вида  $(s_1, i_1) \xrightarrow{w[1]} (s_2, i_2) \xrightarrow{w[2]} \dots$

По устройству  $A$  и успешности  $\rho$ , в  $\rho$  содержится бесконечная подпоследовательность  $((q_0, 0), (q_1, 1), \dots, (q_n, n \bmod k), \dots) \in F^\omega$

По построению  $A$ :

- ▶  $\rho_g = (s_1 \xrightarrow{w[1]} s_2 \xrightarrow{w[2]} \dots)$  — вычисление  $GA$
- ▶ Для всех  $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$  верно  $q_i \in F_{i \bmod k}$

Значит,  $\{q_i, q_{i+k}, q_{i+2k}, \dots\} \subseteq \text{inf}(\rho_g) \cap F_i$  для всех  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$

Следовательно,  $\rho_g$  — успешное вычисление  $GA$ , и  $w \in L(GA)$

# Теорема о разобобщении автомата Бюхи

Для любого обобщённого автомата Бюхи  $GA$   
и любого его разобобщения  $A$  верно  $L(A) = L(GA)$

Доказательство ( $L(A) \supseteq L(GA)$ )

$$(GA = (S, S_0, \rightarrow, \{F_0, \dots, F_{k-1}\}), A = (S', S'_0, \mapsto, F))$$

Рассмотрим произвольное  $\omega$ -слово  $w \in L(GA)$

В  $GA$  существует успешное вычисление  $\rho_g$  вида  $s_1 \xrightarrow{w[1]} s_2 \xrightarrow{w[2]} \dots$

По успешности  $\rho_g$ , существуют такие индексы  $i_0, i_1, i_2, \dots$ :

- ▶  $i_0$  — наименьший, для которого  $s_{i_0} \in F_0$
- ▶  $i_m, m \geq 1$ , — наименьший, для которого  $i_m > i_{m-1}$  и  $s_{i_m} \in F_{m \bmod k}$

Тогда, по построению, в  $A$  содержится успешное вычисление, принимающее  $w$ :

$$(s_1, 1) \mapsto \dots \mapsto (s_{i_0}, 0) \mapsto (s_{i_0+1}, 1) \mapsto \dots \mapsto (s_{i_1}, 1) \mapsto \\ (s_{i_1+1}, 1) \mapsto \dots \mapsto \dots \mapsto (s_{i_{k-1}}, k-1) \mapsto (s_{i_{k-1}+1}, 0) \mapsto \dots (s_{i_k}, k) \mapsto \dots$$

Значит,  $w \in L(A)$  ▼