Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 15

Автоматы Бюхи
Обобщённые автомты Бюхи

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

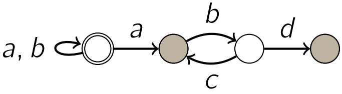
Автоматы Бюхи

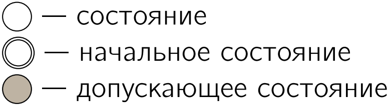
Автомат Бю́хи над алфавитом Σ — это система $A = (S, S_0, \rightarrow, F)$, где:

- S — конечное множество состояний
- S_0 — множество начальных состояний
- $\rightarrow \subseteq S \times \Sigma \times S$ — отношение переходов
  - Изображение семейства переходов $(s, x, s'), (s, y, s'), \ldots$: $s \xrightarrow{x,y,\ldots} s'$
- $F \subseteq S$ — множество допускающих состояний

Как и для моделей Крипке, для автоматов будут применяться терминология и обозначения из теории графов

Пример:





Автоматы Бюхи

В записи слов и ω-слов будем опускать разделители:

$$\text{«}x_1, x_2, x_3, \ldots\text{»} = \text{«}x_1 x_2 x_3 \ldots\text{»}$$

Будем говорить, что бесконечный путь

$$s_1 \xrightarrow{x_1} s_2 \xrightarrow{x_2} s_3 \xrightarrow{x_3} \ldots$$

в автомате Бюхи порождается ω-словом $x_1 x_2 x_3 \ldots$

Вычисление автомата Бюхи — это бесконечный путь, начинающийся в начальном состоянии

$Tr(A, w)$ — множество всех вычислений A, порождающихся ω-словом w

$inf(\rho)$ — множество всех состояний, встречающихся бесконечно часто в бесконечном пути ρ

Автоматы Бюхи

Вычисление ρ автомата Бюхи $A = (S, S_0, \rightarrow, F)$ успешно (является принимающим), если хотя бы одно допускающее состояние повторяется в нём бесконечно часто

$$(inf(\rho) \cap F \neq \emptyset)$$

ω-слово w принимается автоматом Бюхи A, если A содержит хотя бы одно успешное вычисление, порождаемое этим словом

$$(\exists \rho \in \mathrm{Tr}(A, w) : inf(\rho) \cap F \neq \emptyset)$$

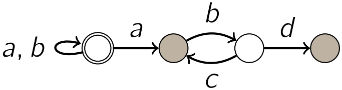
Языком и ω-языком над заданным алфавитом будем называть соответственно множество слов и множество ω-слов

$L(A)$ — так будет обозначаться ω-язык, распознающийся автоматом A (или, более коротко, — ω-язык автомата A): множество всех ω-слов, принимаемых автоматом A

Автоматы Бюхи

Пример

Автоматом Бюхи A



распознаётся ω-язык

$$L(A) = \{Wabcbcbc \dots bc \cdots \mid W \in \{a, b\}^*\}$$

На некоторых этапах автоматного алгоритма *удобно* и *естественно* будет строить автоматы в *более общего* вида, в котором у автомата может быть более одного допускающего множества

Обобщённые автоматы Бюхи

Обобщённый автомат Бюхи над алфавитом Σ — это система $GA = (S, S_0, \rightarrow, \mathcal{F})$, где:

- S, S_0 и $\rightarrow$ — такие же множества состояний, начальных состояний и переходов, что и в автомате Бюхи
- $\mathcal{F} \subseteq 2^S$ — семейство допускающих множеств состояний

Все понятия, введённые для автоматов Бюхи, кроме успешного вычисления, дословно переносятся на обобщённые автоматы

Вычисление ρ обобщённого автомата Бюхи GA успешно, если в **каждом** допускающем множестве есть хотя бы одно состояние, повторяющееся в ρ бесконечно часто

$$(\forall F \in \mathcal{F} : inf(\rho) \cap F \neq \emptyset)$$

Формульная запись того, что слово w принимается автоматом $A = (S, S_0, \rightarrow, \mathcal{F})$, выглядит так:

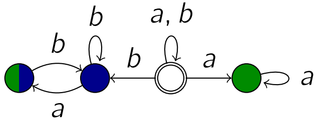
$$\exists \rho \in \mathrm{Tr}(A, w) : \forall F \in \mathcal{F} : inf(\rho) \cap F \neq \emptyset$$

Обобщённые автоматы Бюхи

Далее состояния, принадлежащие одному допускающему множеству, изображаются как окрашенные в один (не белый) цвет

Если вершина принадлежит нескольким принимающим множествам, то она окрашивается во все соответствующие цвета

Пример



Успешное вычисление этого автомата — это вычисление, в котором бесконечно часто повторяются хотя бы одна синяя вершина и хотя бы одна зелёная вершина

Этим автоматом распознаётся множество всех ω-слов вида WbU, где

- $W \in \{a, b\}^*$ и
- U — любое ω-слово над $\{a, b\}$, содержащее бесконечно много «a», но ни одного «aa»

Обобщённые автоматы Бюхи

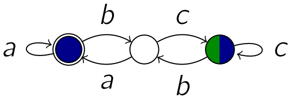
Автомат Бюхи $A = (S', S'_0, \mapsto, F)$ назовём разобобщением обобщённого автомата Бюхи $GA = (S, S_0, \to, \mathcal{F})$, если он устроен так:

- Произвольно упорядочим допускающие множества GA:
$$\mathcal{F} = \{F_0, \dots, F_{k-1}\}$$
- $S' = S \times \{0, 1, \dots, k-1\}$
- $S'_0 = S_0 \times \{0\}$
- $F = \{(s, i) \mid s \in F_i,\ i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$
- Для каждого перехода $(s \xrightarrow{x} s') \in \to$ и каждого $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ в $\mapsto$ включаются следующие переходы (и только такие переходы):
  - если $(s, i) \notin F$, то $(s, i) \overset{x}{\mapsto} (s', i)$
  - иначе $(s, i) \overset{x}{\mapsto} (s', (i+1) \mod k)$

Обобщённые автоматы Бюхи

Пример

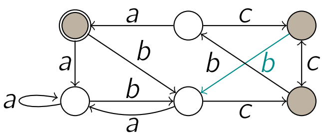
Для обобщённого автомата Бюхи GA



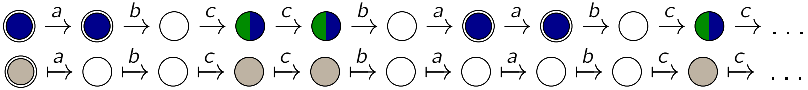
с порядком допускающих множеств (синее, зелёное) соответствует такое разобобщение A:

$(s, \boxed{0})$:

$(s, \boxed{1})$:



Пример взаимно соответствующих вычислений этих автоматов:



Теорема о разобобщении автомата Бюхи

Для любого обобщённого автомата Бюхи GA
и любого его разобобщения A **верно** $L(A) = L(GA)$

Доказательство ($L(A) \subseteq L(GA)$)

Для определённости положим, что
$GA = (S, S_0, \to, \{F_0, \dots, F_{k-1}\})$ и $A = (S', S'_0, \mapsto, F)$

Рассмотрим произвольное ω-слово $w \in L(A)$

В A существует успешное вычисление ρ вида $(s_1, i_1) \xmapsto{w[1]} (s_2, i_2) \xmapsto{w[2]} \dots$

По устройству A и успешности ρ, в ρ содержится бесконечная подпоследовательность $((q_0, 0), (q_1, 1), \dots, (q_n, n \mod k), \dots) \in F^\omega$

По построению A:

- $\rho_g = (s_1 \xrightarrow{w[1]} s_2 \xrightarrow{w[2]} \dots)$ — вычисление GA
- Для всех $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ верно $q_i \in F_{i \mod k}$

Значит, $\{q_i, q_{i+k}, q_{i+2k}, \dots\} \subseteq inf(\rho_g) \cap F_i$ для всех $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$

Следовательно, ρ_g — успешное вычисление GA, и $w \in L(GA)$

Теорема о разобобщении автомата Бюхи

Для любого обобщённого автомата Бюхи GA
и любого его разобобщения A **верно** $L(A) = L(GA)$

Доказательство ($L(A) \supseteq L(GA)$)

$$(GA = (S, S_0, \to, \{F_0, \dots, F_{k-1}\}),\ A = (S', S_0', \mapsto, F))$$

Рассмотрим произвольное ω-слово $w \in L(GA)$

В GA существует успешное вычисление ρ_g вида $s_1 \xrightarrow{w[1]} s_2 \xrightarrow{w[2]} \dots$

По успешности ρ_g, существуют такие индексы $i_0, i_1, i_2, \dots$:

- i_0 — наименьший, для которого $s_{i_0} \in F_0$
- i_m, $m \geq 1$, — наименьший, для которого $i_m > i_{m-1}$ и $s_{i_m} \in F_{m \bmod k}$

Тогда, по построению, в A содержится успешное вычисление, принимающее w:

$$(s_1, 1) \mapsto \dots \mapsto \boxed{(s_{i_0}, 0)} \mapsto (s_{i_0+1}, 1) \mapsto \dots \mapsto \boxed{(s_{i_1}, 1)} \mapsto$$
$$(s_{i_1+1}, 1) \mapsto \dots \mapsto \dots \mapsto \boxed{(s_{i_{k-1}}, k-1)} \mapsto (s_{i_{k-1}+1}, 0) \mapsto \dots \boxed{(s_{i_k}, k)} \mapsto \dots$$

Значит, $w \in L(A)$ ▼