

Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 15

Автоматы Бюхи
Обобщённые автоматы Бюхи

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

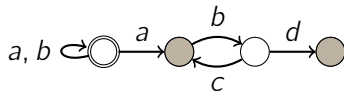
Автоматы Бюхи

Автомат Бюхи над алфавитом Σ — это система $A = (S, S_0, \rightarrow, F)$, где:

- ▶ S — конечное множество **состояний**
- ▶ S_0 — множество **начальных** состояний
- ▶ $\rightarrow \subseteq S \times \Sigma \times S$ — отношение **переходов**
 - ▶ Изображение семейства переходов $(s, x, s'), (s, y, s'), \dots: s \xrightarrow{x, y, \dots} s'$
- ▶ $F \subseteq S$ — множество **допускающих** состояний

Как и для моделей Крипке, для автоматов будут применяться терминология и обозначения из теории графов

Пример:



- — состояние
- ⊖ — начальное состояние
- — допускающее состояние

Автоматы Бюхи

В записи слов и ω -слов будем опускать разделители:

$$\langle\langle x_1, x_2, x_3, \dots \rangle\rangle = \langle\langle x_1 x_2 x_3 \dots \rangle\rangle$$

Будем говорить, что бесконечный путь

$$s_1 \xrightarrow{x_1} s_2 \xrightarrow{x_2} s_3 \xrightarrow{x_3} \dots$$

в автомате Бюхи **порождается** ω -словом $x_1 x_2 x_3 \dots$

Вычисление автомата Бюхи — это бесконечный путь, начинающийся в начальном состоянии

$\text{Tr}(A, w)$ — множество всех вычислений A , порождающихся ω -словом w

$\text{inf}(\rho)$ — множество всех состояний, встречающихся бесконечно часто в бесконечном пути ρ

Автоматы Бюхи

Вычисление ρ автомата Бюхи $A = (S, S_0, \rightarrow, F)$ **успешно** (является **принимающим**), если хотя бы одно заключительное состояние повторяется в нём бесконечно часто

$$(\text{inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset)$$

ω -слово w **принимается** автоматом Бюхи A , если A содержит хотя бы одно успешное вычисление, порождаемое этим словом

$$(\exists \rho \in \text{Tr}(A, w) : \text{inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset)$$

Языком и **ω -языком** над заданным алфавитом будем называть соответственно множество слов и множество ω -слов

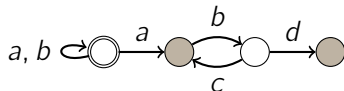
$L(A)$ — так будет обозначаться ω -язык, **распознающийся** автоматом A (или, более коротко, — **ω -язык автомата A**):

множество всех ω -слов, принимаемых автоматом A

Автоматы Бюхи

Пример

Автоматом Бюхи A



распознаётся ω -язык

$$L(A) = \{Wabcbcbcbcb \dots bc \dots \mid W \in \{a, b\}^*\}$$

На некоторых этапах автоматного алгоритма *удобно* и *естественно* будет строить автоматы в *более общего* вида, в котором у автомата может быть более одного допускающего множества

Обобщённые автоматы Бюхи

Обобщённый автомат Бюхи над алфавитом Σ — это система $GA = (S, S_0, \rightarrow, \mathcal{F})$, где:

- ▶ S, S_0 и \rightarrow — такие же множества **состояний**, **начальных состояний** и **переходов**, что и в автомате Бюхи
- ▶ $\mathcal{F} \subseteq 2^S$ — семейство **допускающих множеств** состояний

Все понятия, введённые для автоматов Бюхи, кроме **успешного вычисления**, дословно переносятся на обобщённые автоматы

Вычисление ρ обобщённого автомата Бюхи GA **успешно**, если в **каждом** допускающем множестве есть хотя бы одно состояние, повторяющееся в ρ бесконечно часто

$$(\forall F \in \mathcal{F} : \text{inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset)$$

Формульная запись того, что

слово w **принимается** автоматом $A = (S, S_0, \rightarrow, \mathcal{F})$, выглядит так:

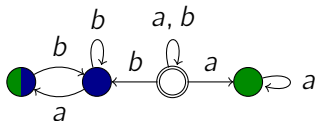
$$\exists \rho \in \text{Tr}(A, w) : \forall F \in \mathcal{F} : \text{inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset$$

Обобщённые автоматы Бюхи

Далее состояния, принадлежащие одному допускающему множеству, изображаются как окрашенные в один (не белый) цвет

Если вершина принадлежит нескольким принимающим множествам, то она окрашивается во все соответствующие цвета

Пример



Успешное вычисление этого автомата — это вычисление, в котором бесконечно часто повторяются

хотя бы одна синяя вершина и хотя бы одна зелёная вершина

Этим автоматом распознаётся множество всех ω -слов вида WbU , где

- ▶ $W \in \{a, b\}^*$ и
- ▶ U — любое ω -слово над $\{a, b\}$, содержащее бесконечно много « a », но ни одного « aa »

Обобщённые автоматы Бюхи

Автомат Бюхи $A = (S', S'_0, \mapsto, F)$ назовём **разобобщением** обобщённого автомата Бюхи $GA = (S, S_0, \rightarrow, \mathcal{F})$, если он устроен так:

- ▶ Произвольно упорядочим допускающие множества GA :

$$\mathcal{F} = \{F_0, \dots, F_{k-1}\}$$

- ▶ $S' = S \times \{0, 1, \dots, k-1\}$

- ▶ $S'_0 = S_0 \times \{0\}$

- ▶ $F = \{(s, i) \mid s \in F_i, i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$

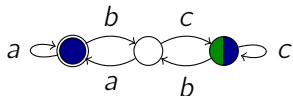
- ▶ Для каждого перехода $(s \xrightarrow{x} s') \in \rightarrow$ и каждого $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ в \mapsto включаются следующие переходы (и только такие переходы):

- ▶ если $(s, i) \notin F$, то $(s, i) \xrightarrow{x} (s', i)$
- ▶ иначе $(s, i) \xrightarrow{x} (s', (i+1) \bmod k)$

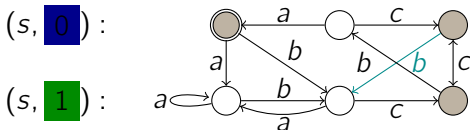
Обобщённые автоматы Бюхи

Пример

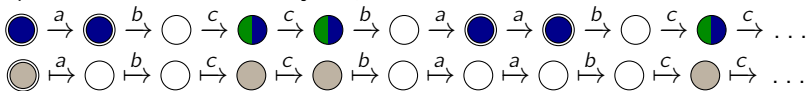
Для обобщённого автомата Бюхи GA



с порядком допускающих множеств (синее, зелёное) соответствует такое разобложение A :



Пример взаимно соответствующих вычислений этих автоматов:



Теорема о разобобщении автомата Бюхи

Для любого обобщённого автомата Бюхи GA
и любого его разобобщения A верно $L(A) = L(GA)$

Доказательство ($L(A) \subseteq L(GA)$)

Для определённости положим, что

$GA = (S, S_0, \rightarrow, \{F_0, \dots, F_{k-1}\})$ и $A = (S', S'_0, \mapsto, F)$

Рассмотрим произвольное ω -слово $w \in L(A)$

В A существует успешное вычисление ρ вида $(s_1, i_1) \xrightarrow{w[1]} (s_2, i_2) \xrightarrow{w[2]} \dots$

По устройству A и успешности ρ , в ρ содержится бесконечная подпоследовательность $((q_0, 0), (q_1, 1), \dots, (q_n, n \bmod k), \dots) \in F^\omega$

По построению A :

- ▶ $\rho_g = (s_1 \xrightarrow{w[1]} s_2 \xrightarrow{w[2]} \dots)$ — вычисление GA
- ▶ Для всех $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ верно $q_i \in F_{i \bmod k}$

Значит, $\{q_i, q_{i+k}, q_{i+2k}, \dots\} \subseteq \text{inf}(\rho_g) \cap F_i$ для всех $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$

Следовательно, ρ_g — успешное вычисление GA , и $w \in L(GA)$

Теорема о разобобщении автомата Бюхи

Для любого обобщённого автомата Бюхи GA
и любого его разобобщения A верно $L(A) = L(GA)$

Доказательство ($L(A) \supseteq L(GA)$)

$$(GA = (S, S_0, \rightarrow, \{F_0, \dots, F_{k-1}\}), A = (S', S'_0, \mapsto, F))$$

Рассмотрим произвольное ω -слово $w \in L(GA)$

В GA существует успешное вычисление ρ_g вида $s_1 \xrightarrow{w[1]} s_2 \xrightarrow{w[2]} \dots$

По успешности ρ_g , существуют такие индексы i_0, i_1, i_2, \dots :

- ▶ i_0 — наименьший, для которого $s_{i_0} \in F_0$
- ▶ $i_m, m \geq 1$, — наименьший, для которого $i_m > i_{m-1}$ и $s_{i_m} \in F_m \bmod k$

Тогда, по построению, в A содержится успешное вычисление, принимающее w :

$$(s_1, 1) \mapsto \dots \mapsto (s_{i_0}, 0) \mapsto (s_{i_0+1}, 1) \mapsto \dots \mapsto (s_{i_1}, 1) \mapsto \\ (s_{i_1+1}, 1) \mapsto \dots \mapsto \dots \mapsto (s_{i_{k-1}}, k-1) \mapsto (s_{i_{k-1}+1}, 0) \mapsto \dots (s_{i_k}, k) \mapsto \dots$$

Значит, $w \in L(A)$ ▼