

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы

→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 30

Вычислительные возможности
метода резолюций

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

Теорема о входной резолюции как средстве вычисления

Пусть

- ▶ S — система D-правил,
- ▶ Q_1 — D-запрос,
- ▶ $Q_1, R_1, Q_2, R_2, \dots, Q_k, R_k, \square, k \geq 0$, — успешный входной резолютивный вывод из $S \cup \{Q_1\}$,
- ▶ $\theta_1, \dots, \theta_k$ — наиболее общие унификаторы, согласно которым в выводе строятся резольвенты Q_2, \dots, Q_k, \square соответственно, и

Тогда $S \models ((\neg Q_1)\theta_1 \dots \theta_k)^\forall$

Здесь и далее $\varphi^\forall = \forall \tilde{x}^n \varphi$, где $\{x_1, \dots, x_n\} = \text{Var}_\varphi$

Доказательство (индукцией по k).

База: $k = 0$

Тогда $Q_1 = \square$, $\text{Var}_{Q_1} = \emptyset$ и $S \not\models \square$, а значит, $S \models \neg Q_1$

Теорема о входной резолюции как средстве вычисления

Доказательство (индуктивный переход).

$$(Q_1, R_1 \xrightarrow{\theta_1} Q_2, R_2 \xrightarrow{\theta_2} \dots \xrightarrow{\theta_{k-1}} Q_k, R_k \xrightarrow{\theta_k} \square)$$

Пусть утверждение справедливо для $k < N$ для заданного N , $N \geq 1$;
покажем, что оно справедливо и для $k = N$

Пусть, для ясности, $Q_1 = \neg(A_1 \& \dots \& A_q \& B)$, $Q_2 = \neg(A_1 \& \dots \& A_p) \theta_1$,
 $R_1 = A_{q+1} \& \dots \& A_p \rightarrow C$, $B\theta_1 = C\theta_1$ и $\eta = \theta_2 \dots \theta_k$

По индуктивному предположению, верно $S \models ((\neg Q_2)\eta)^\forall$

Значит, верно

$$S \models ((A_1 \& \dots \& A_q) \theta_1 \eta)^\forall \quad \text{и} \quad S \models ((A_{q+1} \& \dots \& A_p) \theta_1 \eta)^\forall \quad (\text{почему?})$$

При этом $S \models (A_{q+1} \& \dots \& A_p \rightarrow C)^\forall$, (почему?)
а значит, и $S \models ((A_{q+1} \& \dots \& A_p \rightarrow C) \theta_1 \eta)^\forall$ (почему?)

Тогда, $S \models (C\theta_1 \eta)^\forall$ (почему?)

При этом $C\theta_1 = B\theta_1$, а значит, $S \models (B\theta_1 \eta)^\forall$

Следовательно, $S \models ((\neg Q_1) \theta_1 \eta)^\forall$ ▼

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: Даша, Саша, Паша и пиво

$$S = \left\{ \begin{array}{l} L(\Delta, C), \quad L(C, \pi), \quad L(\Pi, \pi), \\ L(\Pi, y) \& L(x, y) \rightarrow L(\Pi, x) \end{array} \right\} \quad Q_1 = \neg L(z, \Delta)$$

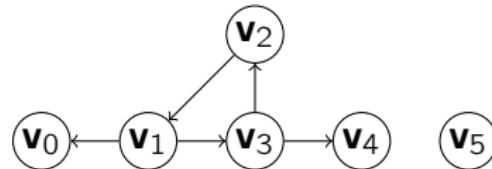
$$\begin{array}{c} \neg L(z, \Delta) \\ \downarrow \quad \theta_1 = \{z/\Pi, x'/\Delta, y'/y\} \\ L(\Pi, y) \& L(x, y) \rightarrow L(\Pi, x) \longrightarrow \neg(L(\Pi, y) \& L(\Delta, y)) \\ \downarrow \quad \theta_2 = \{y/C\} \\ L(\Delta, C) \longrightarrow \neg L(\Pi, C) \\ \downarrow \quad \theta_3 = \{x'/C, y'/y\} \\ L(\Pi, y) \& L(x, y) \rightarrow L(\Pi, x) \longrightarrow \neg(L(\Pi, y) \& L(C, y)) \\ \downarrow \quad \theta_4 = \{y/\pi\} \\ L(\Pi, \pi) \longrightarrow \neg L(C, \pi) \\ \downarrow \quad \theta_5 = \varepsilon \\ L(C, \pi) \longrightarrow \square \end{array}$$

По только что доказанной теореме, верно $S \models L(z, \Delta) \theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5$

То есть $S \models L(\Pi, \Delta)$: Паша действительно любит Дашу

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе



Достижима ли вершина v_4 из v_1 , и если да, то по какому пути?

Попробуем записать эту задачу на языке логики предикатов и решить при помощи входной резолюции

Вершины графа (v_0, v_1, \dots) — это константы

Ещё так получится, что вершинами графа можно считать все термы, но в рассматриваемом примере это неважно

Тот факт, что (u, w) — дуга графа, будет записываться в виде атома $\text{Arc}(u, w)$

Тогда в нашем распоряжении есть пять фактов, отвечающих пяти дугам:

$$\begin{array}{lll} \text{Arc}(v_1, v_0) & \text{Arc}(v_1, v_3) & \text{Arc}(v_3, v_2) \\ \text{Arc}(v_2, v_1) & \text{Arc}(v_3, v_4) & \end{array}$$

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе

Путь $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k$ будет записываться так (чтобы не путать дуги и импликации):

$$u_1 \hookrightarrow u_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow u_k$$

\hookrightarrow — это функциональный символ местности 2

Символ \hookrightarrow положим **ассоциативным вправо**: $x \hookrightarrow y \hookrightarrow z = x \hookrightarrow (y \hookrightarrow z)$

Тот факт, что вершина w достижима из u по пути π , будем записывать в виде атома $\text{Reach}(u, w, \pi)$

Тогда для такого трёхместного отношения достижимости справедливы следующие свойства (*индуктивное определение*):

- ▶ Любая вершина достижима из себя по тривиальному пути
$$\forall x \text{Reach}(x, x, x)$$
- ▶ Если в графе есть дуга $x \hookrightarrow y$ и из y по пути π достижима вершина z , то из x по пути $x \hookrightarrow \pi$ достижима вершина z
$$\forall x \forall y \forall z \forall p (\text{Arc}(x, y) \& \text{Reach}(y, z, p) \rightarrow \text{Reach}(x, z, x \hookrightarrow p))$$

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе



Входные данные задачи можно записать в виде системы дизъюнктов:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \text{Arc}(v_1, v_0) \quad \text{Arc}(v_1, v_3) \quad \text{Arc}(v_3, v_2) \\ \text{Arc}(v_2, v_1) \quad \text{Arc}(v_3, v_4) \quad \text{Reach}(x, x, x) \\ \text{Arc}(x, y) \& \text{Reach}(y, z, p) \rightarrow \text{Reach}(x, z, x \rightarrow p) \end{array} \right\}$$

Вопрос к задаче можно записать в виде формулы $\exists p \text{ Reach}(v_1, v_4, p)$

Отрицание этой формулы — это D-запрос

$$\varphi = \neg \text{Reach}(v_1, v_4, p)$$

Чтобы убедиться, что вершина v_4 достижима из v_1 , и найти соответствующий путь, достаточно построить успешный входной вывод \square из $S \cup \{\varphi\}$, инициированный φ , и применить недавно доказанную теорему

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \text{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0) \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) \\ \text{Arc}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \quad \text{Reach}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) \\ \text{Arc}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \& \text{Reach}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{p}) \rightarrow \text{Reach}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{p}) \\ \neg \text{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{p}) \end{array} \right\}$$

$$\theta_1 = \{ \mathbf{x}/\mathbf{v}_1, \mathbf{z}/\mathbf{v}_4, \mathbf{p}/\mathbf{v}_1 \leftarrow \mathbf{p}' \} \downarrow \quad \text{Arc}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \& \text{Reach}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{p}') \rightarrow \text{Reach}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{p}') \\ \neg (\text{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{y}) \& \text{Reach}(\mathbf{y}, \mathbf{v}_4, \mathbf{p}')) \leftarrow \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$$

$$\theta_2 = \{ \mathbf{y}/\mathbf{v}_3 \} \{ \mathbf{p}'/\mathbf{p}, \mathbf{p}'/\mathbf{p} \} \downarrow \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) \\ \neg \text{Reach}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{p}) \leftarrow \quad \neg \text{Reach}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{p})$$

$$\theta_3 = \{ \mathbf{x}/\mathbf{v}_3, \mathbf{z}/\mathbf{v}_4, \mathbf{p}/\mathbf{v}_3 \leftarrow \mathbf{p}' \} \downarrow \quad \text{Arc}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \& \text{Reach}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{p}') \rightarrow \text{Reach}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{p}') \\ \neg (\text{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{y}) \& \text{Reach}(\mathbf{y}, \mathbf{v}_4, \mathbf{p}')) \leftarrow \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$$

$$\theta_4 = \{ \mathbf{y}/\mathbf{v}_4 \} \{ \mathbf{p}'/\mathbf{p}, \mathbf{p}/\mathbf{p}' \} \downarrow \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \\ \neg \text{Reach}(\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4, \mathbf{p}) \leftarrow \quad \neg \text{Reach}(\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4, \mathbf{p})$$

$$\theta_5 = \{ \mathbf{p}/\mathbf{v}_4, \mathbf{x}/\mathbf{v}_4 \} \downarrow \quad \text{Reach}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) \\ \square \leftarrow \quad \text{Reach}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x})$$

$$\text{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{p}) \theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 = \text{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 \leftarrow \mathbf{v}_3 \leftarrow \mathbf{v}_4)$$

Следовательно, вершина \mathbf{v}_4 достижима из \mathbf{v}_1 по пути $\mathbf{v}_1 \leftarrow \mathbf{v}_3 \leftarrow \mathbf{v}_4$