

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 30

Вычислительные возможности
метода резолюций

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2023/2024, осенний семестр

Теорема о входной резолюции как средстве вычисления

Пусть

- ▶ S — система дизъюнктов-правил,
- ▶ Q_1 — дизъюнкт-запрос,
- ▶ $Q_1, D_1, Q_2, D_2, \dots, Q_k, D_k, \square, k \geq 0$, — успешный входной резолютивный вывод из $S \cup \{Q_1\}$,
- ▶ $\theta_1, \dots, \theta_k$ — наиболее общие унификаторы, согласно которым в выводе строятся резольвенты Q_2, \dots, Q_k, \square соответственно, и
- ▶ $\text{Var}_{Q_1\theta_1\dots\theta_k} = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Тогда $S \models \forall \tilde{x}^n ((\neg Q_1)\theta_1 \dots \theta_k)$

Доказательство (индукцией по k).

База: $k = 0$

Тогда $Q_1 = \square$, $\text{Var}_{Q_1} = \emptyset$ и $S \not\models \square$, а значит, $S \models \neg Q_1$

Теорема о входной резолюции как средстве вычисления

Доказательство (индуктивный переход).

$$(Q_1, D_1 \xrightarrow{\theta_1} Q_2, D_2 \xrightarrow{\theta_2} \dots \xrightarrow{\theta_{k-1}} Q_k, D_k \xrightarrow{\theta_k} \square)$$

Пусть утверждение справедливо для $k < N$ для заданного N , $N \geq 1$;
покажем, что оно справедливо и для $k = N$

Далее $\forall \dots \varphi$ означает $\forall \tilde{x}^n \varphi$, где $\text{Var}_\varphi = \{x_1, \dots, x_n\}$

Пусть $Q_1 = \neg(A_1 \& \dots \& A_q \& B)$, $Q_2 = \neg(A_1 \& \dots \& A_p)\theta_1$,
 $D_1 = A_{q+1} \& \dots \& A_p \rightarrow C$, $B\theta_1 = C\theta_1$ и $\eta = \theta_2 \dots \theta_k$

По индуктивному предположению, верно $S \models \forall \dots ((\neg Q_2)\eta)$

Значит, верно $S \models \forall \dots ((A_1 \& \dots \& A_q)\theta_1\eta)$ и

$S \models \forall \dots ((A_{q+1} \& \dots \& A_p)\theta_1\eta)$

(почему?)

При этом $S \models \forall \dots (A_{q+1} \& \dots \& A_p \rightarrow C)$,

(почему?)

а значит, и $S \models \forall \dots ((A_{q+1} \& \dots \& A_p \rightarrow C)\theta_1\eta)$

(почему?)

Тогда, $S \models \forall \dots (C\theta_1\eta)$

(почему?)

При этом $C\theta_1 = B\theta_1$, а значит, $S \models \forall \dots (B\theta_1\eta)$

Следовательно, $S \models \forall \dots ((\neg Q_1)\theta_1\eta)$ ▼

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: Даша, Саша, Паша и пиво

$$S = \left\{ \begin{array}{l} L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}), \quad L(\mathbf{С}, \mathbf{п}), \quad L(\mathbf{П}, \mathbf{п}), \\ L(\mathbf{П}, \mathbf{y}) \ \& \ L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow L(\mathbf{П}, \mathbf{x}) \end{array} \right\} \quad Q_1 = \neg L(\mathbf{z}, \mathbf{Д})$$

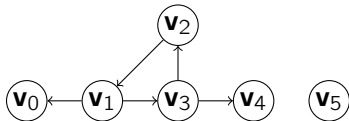
$$\begin{array}{rcl} & \neg L(\mathbf{z}, \mathbf{Д}) & \\ & \downarrow & \theta_1 = \{z/\mathbf{П}, x'/\mathbf{Д}, y'/y\} \\ L(\mathbf{П}, \mathbf{y}) \ \& \ L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow L(\mathbf{П}, \mathbf{x}) & \rightarrow \neg(L(\mathbf{П}, \mathbf{y}) \ \& \ L(\mathbf{Д}, \mathbf{y})) \\ & \downarrow & \theta_2 = \{y/\mathbf{С}\} \\ L(\mathbf{Д}, \mathbf{С}) & \longrightarrow & \neg L(\mathbf{П}, \mathbf{С}) \\ & \downarrow & \theta_3 = \{x'/\mathbf{С}, y'/y\} \\ L(\mathbf{П}, \mathbf{y}) \ \& \ L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow L(\mathbf{П}, \mathbf{x}) & \rightarrow \neg(L(\mathbf{П}, \mathbf{y}) \ \& \ L(\mathbf{С}, \mathbf{y})) \\ & \downarrow & \theta_4 = \{y/\mathbf{п}\} \\ L(\mathbf{П}, \mathbf{п}) & \longrightarrow & \neg L(\mathbf{С}, \mathbf{п}) \\ & \downarrow & \theta_5 = \varepsilon \\ L(\mathbf{С}, \mathbf{п}) & \longrightarrow & \square \end{array}$$

По только что доказанной теореме, верно $S \models L(\mathbf{z}, \mathbf{Д})\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5$

То есть $S \models L(\mathbf{П}, \mathbf{Д})$: Паша действительно любит Дашу

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе



Достижима ли вершина v_4 из v_1 , и если да, то по какому пути?

Попробуем записать эту задачу на языке логики предикатов и решить при помощи входной резолюции

Вершины графа (v_0, v_1, \dots) — это константы

Ещё так получится, что вершинами графа можно считать все термы, но в рассматриваемом примере это неважно

Тот факт, что (u, w) — дуга графа, будет записываться в виде атома $\text{Arc}(u, w)$

Тогда в нашем распоряжении есть пять фактов, отвечающих пяти дугам:

$$\begin{array}{l} \text{Arc}(v_1, v_0) \quad \text{Arc}(v_1, v_3) \quad \text{Arc}(v_3, v_2) \\ \text{Arc}(v_2, v_1) \quad \text{Arc}(v_3, v_4) \end{array}$$

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе

Путь $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k$ будет записываться так (чтобы не путать дуги и импликации):

$$u_1 \hookrightarrow u_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow u_k$$

\hookrightarrow — это функциональный символ местности 2

Символ \hookrightarrow положим **ассоциативным вправо**: $x \hookrightarrow y \hookrightarrow z = x \hookrightarrow (y \hookrightarrow z)$

Тот факт, что вершина w достижима из u по пути π , будем записывать в виде атома $\text{Reach}(u, w, \pi)$

Тогда для такого трёхместного отношения достижимости справедливы следующие свойства (*индуктивное определение*):

- ▶ Любая вершина достижима из себя по тривиальному пути

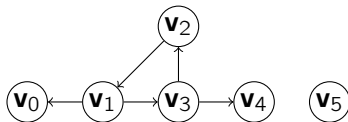
$$\forall x \text{ Reach}(x, x, x)$$

- ▶ Если в графе есть дуга $x \hookrightarrow y$ и из y по пути π достижима вершина z , то из x по пути $x \hookrightarrow \pi$ достижима вершина z

$$\forall x \forall y \forall z \forall p (\text{Arc}(x, y) \ \& \ \text{Reach}(y, z, p) \rightarrow \text{Reach}(x, z, x \hookrightarrow p))$$

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе



$v_1 \rightsquigarrow v_4 ?$

Входные данные задачи можно записать в виде системы дизъюнктов:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \text{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0) \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) \\ \text{Arc}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) \quad \text{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \quad \text{Reach}(x, x, x) \\ \text{Arc}(x, y) \ \& \ \text{Reach}(y, z, p) \rightarrow \text{Reach}(x, z, x \hookrightarrow p) \end{array} \right\}$$

Вопрос к задаче можно записать в виде формулы $\exists p \text{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, p)$

Отрицание этой формулы — это дизъюнкт-запрос

$$\varphi = \neg \text{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, p)$$

Чтобы убедиться, что вершина \mathbf{v}_4 достижима из \mathbf{v}_1 , и найти соответствующий путь, достаточно построить успешный входной вывод

\square из $S \cup \{\varphi\}$, инициированный φ , и применить **недавно доказанную теорему**

Вычисление при помощи входной резолюции (примеры)

Пример: проверка достижимости в графе

$$S = \left\{ \begin{array}{lll} \text{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0) & \text{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) & \text{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) \\ \text{Arc}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & \text{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) & \text{Reach}(x, x, x) \\ \text{Arc}(x, y) \ \& \ \text{Reach}(y, z, p) \rightarrow \text{Reach}(x, z, x \leftrightarrow p) \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \neg \text{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, p) \\ \theta_1 = \{x/\mathbf{v}_1, z/\mathbf{v}_4, p/\mathbf{v}_1 \leftrightarrow p'\} \downarrow \text{Arc}(x, y) \ \& \ \text{Reach}(y, z, p') \rightarrow \text{Reach}(x, z, x \leftrightarrow p') \\ \neg(\text{Arc}(\mathbf{v}_1, y) \ \& \ \text{Reach}(y, \mathbf{v}_4, p')) \longleftarrow \hspace{10em} \\ \theta_2 = \{y/\mathbf{v}_3\} \{p'/p, p'/p'\} \downarrow \hspace{10em} \text{Arc}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) \\ \neg \text{Reach}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, p) \longleftarrow \hspace{10em} \\ \theta_3 = \{x/\mathbf{v}_3, z/\mathbf{v}_4, p/\mathbf{v}_3 \leftrightarrow p'\} \downarrow \text{Arc}(x, y) \ \& \ \text{Reach}(y, z, p') \rightarrow \text{Reach}(x, z, x \leftrightarrow p') \\ \neg(\text{Arc}(\mathbf{v}_3, y) \ \& \ \text{Reach}(y, \mathbf{v}_4, p')) \longleftarrow \hspace{10em} \\ \theta_4 = \{y/\mathbf{v}_4\} \{p'/p, p/p'\} \downarrow \hspace{10em} \text{Arc}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \\ \neg \text{Reach}(\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4, p) \longleftarrow \hspace{10em} \\ \theta_5 = \{p/\mathbf{v}_4, x/\mathbf{v}_4\} \downarrow \hspace{10em} \text{Reach}(x, x, x) \\ \square \longleftarrow \hspace{10em} \end{array}$$

$$\text{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, p) \theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 = \text{Reach}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 \leftrightarrow \mathbf{v}_3 \leftrightarrow \mathbf{v}_4)$$

Следовательно, вершина \mathbf{v}_4 достижима из \mathbf{v}_1 по пути $\mathbf{v}_1 \leftrightarrow \mathbf{v}_3 \leftrightarrow \mathbf{v}_4$