

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 9

Подстановки
(основные определения)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр

Вступление

$\models \varphi \Leftrightarrow$ семантическая таблица $\langle \mid \varphi \rangle$ невыполнима

Для проверки общезначимости формул достаточно придумать правила преобразования таблиц, позволяющие извлекать «явные противоречия» (закрытые таблицы) из таблиц, содержащих «неявные противоречия» (невыполнимых)

Для примера рассмотрим такую невыполнимую таблицу:

$$\langle \forall x P(x) \mid P(c) \rangle$$

Чтобы преобразовать эту таблицу в закрытую, достаточно заметить, что если утверждение $P(x)$ выполняется для любого предмета x , то оно выполняется, в частности, и для предмета, обозначенного константой c

Значит, можно **подставить** на место x константу c и получить выполнимость утверждения $P(c)$

Добавив это утверждение в левую часть, получим закрытую таблицу:

$$\langle \forall x P(x), P(c) \mid P(c) \rangle$$

Чтобы строго сформулировать соответствующее правило, следует строго определить, что такое «**подставить**»

Подстановки

Пусть заданы множество переменных Var и множество термов Term

Подстановка — это отображение $\theta : \text{Var} \rightarrow \text{Term}$

Область подстановки θ : $\text{Dom}_\theta = \{x \mid x \in \text{Var}, \theta(x) \neq x\}$

Подстановка **конечна**, если её область конечна

Subst — множество всех конечных подстановок

$\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ — это конечная подстановка θ , для которой верно:

- ▶ $\text{Dom}_\theta = \{x_1, \dots, x_n\}$
- ▶ $\theta(x_i) = t_i, \quad 1 \leq i \leq n$

Запись x/t , где $x \in \text{Var}$ и $t \in \text{Term}$, называется **связкой**

Содержательно, связка x/t означает, что при *применении* (*выполнении*) подстановки переменная x должна быть заменена на терм t

ε — это **тождественная** (**пустая**) подстановка: $\text{Dom}_\varepsilon = \emptyset$

Подстановки

Пусть E — логическое выражение логики предикатов (терм или формула) и θ — подстановка

Результат $E\theta$ применения подстановки θ к E определяется так:

$x\theta = \theta(x)$	$(x \in \text{Var})$
$c\theta = c$	$(c \in \text{Const})$
$\mathbf{f}(t_1, \dots, t_n)\theta = \mathbf{f}(t_1\theta, \dots, t_n\theta)$	$(\mathbf{f} \in \text{Func}, t_1, \dots, t_n \in \text{Term})$
$P(t_1, \dots, t_n)\theta = P(t_1\theta, \dots, t_n\theta)$	$(P \in \text{Pred})$
$(\varphi \ \& \ \psi)\theta = (\varphi\theta \ \& \ \psi\theta)$	$(\varphi, \psi \in \text{Form})$
$(\varphi \vee \psi)\theta = (\varphi\theta \vee \psi\theta)$	
$(\varphi \rightarrow \psi)\theta = (\varphi\theta \rightarrow \psi\theta)$	
$(\neg\varphi)\theta = (\neg\varphi\theta)$	
$(\forall x \ \varphi)\theta = (\forall x \ \varphi\theta')$	$(\theta'(x) = x;$
$(\exists x \ \varphi)\theta = (\exists x \ \varphi\theta')$	$\theta'(y) = \theta(y), \text{ если } y \neq x)$

Иными словами, $E\theta$ получается из выражения E так:

- ▶ E — терм \Rightarrow все вхождения переменных заменяются на их θ -образы
- ▶ E — формула \Rightarrow все **свободные** вхождения переменных заменяются на их θ -образы

Подстановки

Пример применения подстановки к формуле

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(\mathbf{f(x)}) \vee \exists y P(y) \vee R(u)$$
$$\theta = \{x/\mathbf{g(x, c)}, y/x, z/\mathbf{f(z)}\}$$

Выделяются все свободные вхождения переменных в φ

$$\forall x (P(x) \rightarrow \neg R(\mathbf{y})) \rightarrow R(\mathbf{f(x)}) \vee \exists y P(y) \vee R(\mathbf{u})$$

Все выделенные вхождения заменяются согласно θ

$$\varphi\theta = \forall x (P(x) \rightarrow \neg R(\mathbf{x})) \rightarrow R(\mathbf{f(g(x, c))}) \vee \exists y P(y) \vee R(\mathbf{u})$$

Подстановки

При применении подстановок для выделения «частных случаев» следует соблюдать осторожность

Например:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(\mathbf{x}, y)$$

«если у каждого есть дед, то у \mathbf{x} тоже есть дед»

Очевидно, что $\models \varphi(\mathbf{x})$

$$\varphi\{x/y\} = \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, y)$$

«если у каждого есть дед, то есть и тот, кто сам себе дед»

Очевидно, что $\not\models \varphi\theta$

Почему смысл формулы после применения подстановки так исказился?

Подстановки

Переменная x **свободна для термина t в формуле φ** , если ни одно свободное вхождение переменной x не лежит в областях действия кванторов, связывающих переменные из Var_t

Подстановка $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ — **правильная для формулы φ** , если для каждой связки x_i/t_i переменная x_i свободна для термина t_i в формуле φ

Например, для формулы $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(x, y)$

- ▶ подстановка $\{x/f(u, v)\}$ — правильная:
все вхождения u и v в подставляемый терм свободны
- ▶ подстановка $\{x/y\}$ — неправильная:
вхождение y в подставляемый терм оказывается связанным

Подстановки

Утверждение (о правильной подстановке)

Для любых формулы $\varphi(\tilde{x}^n, x)$, интерпретации \mathcal{I} , набора предметов \tilde{d}^n и подстановки $\{x/t(\tilde{x}^n)\}$, правильной для φ , верно:

$$\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n, t[\tilde{d}^n]] \Leftrightarrow \mathcal{I} \models \varphi\{x/t\}[\tilde{d}^n]$$

Доказательство опустим для экономии времени

и ограничимся небольшим **примером**:

Пусть $\mathbf{1}, \mathbf{3} \in \text{Const}$, $=^{(2)} \in \text{Pred}$, $+^{(2)} \in \text{Func}$

и все эти символы имеют «естественную» арифметическую оценку в \mathcal{I} :

$\overline{\mathbf{1}} = 1$, $\overline{\mathbf{3}} = 3$, \equiv и $\overline{+}$ — отношение равенства и операция сложения чисел

Тогда верно следующее:

$$\mathcal{I} \models (x = \mathbf{3})[y/2, x/3]$$

$$\Leftrightarrow (\overline{\mathbf{3}} = 3 = (\overline{\mathbf{1}} + y)[y/2])$$

$$\mathcal{I} \models (x = \mathbf{3})[y/2, x/((\overline{\mathbf{1}} + y)[y/2])]$$

$$\Leftrightarrow (\text{утверждение выше})$$

$$\mathcal{I} \models (\overline{\mathbf{1}} + y = \overline{\mathbf{3}})[y/2]$$