

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 9

Метод семантических таблиц
в логике предикатов:
семантические таблицы

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

Вступление

Из блока 8:

$$\begin{array}{c} \langle \mid x \rightarrow x \vee y \rangle \\ \downarrow R\rightarrow \\ \langle x \mid x \vee y \rangle \\ \downarrow R\vee \\ \langle x \mid x, y \rangle \\ \text{закрытая таблица} \end{array}$$

Это успешный табличный вывод в логике высказываний, обосновывающий общезначимость формулы $x \rightarrow x \vee y$

Попробуем адаптировать понятие семантической таблицы и в целом метод семантических таблиц к логике предикатов

Определения

Семантическая таблица (логики предикатов) — это упорядоченная пара множеств формул (логики предикатов): $T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$

Таблица T **закрота**, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

Таблица T **атомарна**, если все формулы из $\Gamma \cup \Delta$ атомарны

Эти определения дословно перенесены из логики высказываний

Пусть \tilde{x}^n — все свободные переменные формул из $\Gamma \cup \Delta$

Таблица T **выполнима**, если существуют интерпретация \mathcal{I} и набор предметов \tilde{d}^n из области интерпретации, такие что

- ▶ $\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ для любой формулы φ из Γ
- ▶ $\mathcal{I} \not\models \psi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n]$ для любой формулы ψ из Δ

А это определение по сравнению с логикой высказываний усложнилось: добавились предметы, оценивающие свободные переменные формул

Примеры

1. $\langle P(x) \mid Q(f(c), x) \rangle$

Эта таблица атомарна, незакрыта и выполнима

Выполнимость подтверждается интерпретацией, в которой

$$D = \{d\}, \bar{P}(d) = \text{t} \text{ и } \bar{Q}(d, d) = \text{f},$$

и значением d переменной x

2. $\langle P(x) \mid P(x), Q(f(c), x) \rangle$

Эта таблица атомарна, закрыта и невыполнима

3. $\langle \forall x P(x) \mid \forall x P(x), Q(f(c), x) \rangle$

Эта таблица неатомарна, закрыта и невыполнима

4. $\langle \exists x P(x), \neg P(y) \mid \forall x P(x), P(x) \& \neg P(x) \rangle$

Эта таблица неатомарна, незакрыта и выполнима

Выполнимость подтверждается интерпретацией, в которой

$$D = \{d_1, d_2\}, \bar{P}(d_1) = \text{t} \text{ и } \bar{P}(d_2) = \text{f},$$

и набором d_1, d_2 значений переменных x, y

Основные утверждения

Теорема (о табличной проверке общезначимости в ЛП)

Для любой формулы φ справедлива равносильность

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{таблица } \langle \mid \varphi \rangle \text{ невыполнима}$$

Доказательство.

$$\models \varphi(\tilde{x}^n)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathcal{I} \models \varphi(\tilde{x}^n)[\tilde{d}^n] \text{ для любой интерпретации } \mathcal{I} \\ \text{и любого набора предметов } \tilde{d}^n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{таблица } \langle \mid \varphi \rangle \text{ невыполнима } \blacktriangledown$$

Утверждение. Любая закрытая таблица невыполнима

Утверждение. Любая незакрытая атомарная таблица выполнима

Доказательство. Следует из определений, можете попробовать сами