Лекция: Функция Мёбиуса на ЧУМ. Функция Мёбиуса на n-мерном кубе. Формула обращения Мёбиуса. Принцип включений-исключений. Задача о подсчете числа перестановок-"беспорядков".

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по "Избранным вопросам дискретной математики".
3-й курс, группа 318,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.su

Функция Мёбиуса на ЧУМ

Пусть нам задано возможно бесконечное ЧУМ $(A; \leq)$, но для каждого элемента $a \in A$ найдется **только конечное** число элементов, предшествующих ему.

Определим **функцию Мёбиуса** $\mu(x, y)$ на ЧУМ A:

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y; \\ -\sum\limits_{z:\ x \leq z < y} \mu(x,z), & \text{если } x < y; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция Мёбиуса на кубе E_2^2

Пример 1. Рассмотрим функцию Мёбиуса $\mu(x, y)$ на кубе E_2^2:

$x \setminus y$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	1	-1	-1	1
$(0,1)$	0	1	0	-1
$(1,0)$	0	0	1	-1
$(1,1)$	0	0	0	1

Функция Мёбиуса на кубе E_2^n

Найдем вид функции Мёбиуса на кубе E_2^n.

Лемма 1 (функция Мёбиуса на n-мерном кубе). *Функция Мёбиуса $\mu(\alpha, \beta)$ на кубе E_2^n имеет вид:*

$$\mu(\alpha, \beta) = \begin{cases} (-1)^{|\beta| - |\alpha|}, & \text{если } \alpha \leq \beta; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство проведем индукцией по значению $|\beta| - |\alpha|$.

Базис индукции: $\mu(\alpha, \alpha) = 1 = (-1)^{|\alpha| - |\alpha|} = (-1)^0$ – верно.

Функция Мёбиуса на кубе E_2^n

Доказательство (продолжение). *Индуктивный переход*. Если $\alpha < \beta$, то

$$\mu(\alpha,\beta) = -\sum_{\gamma:\alpha\le\gamma<\beta}\mu(\alpha,\gamma) = -\sum_{\gamma:\alpha\le\gamma<\beta}(-1)^{|\gamma|-|\alpha|} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{|\beta|-|\alpha|-1} C^k_{|\beta|-|\alpha|}(-1)^k - (-1)^{|\beta|-|\alpha|} + (-1)^{|\beta|-|\alpha|} =$$

$$= \left(-\sum_{k=0}^{|\beta|-|\alpha|}(-1)^k C^k_{|\beta|-|\alpha|}\right) + (-1)^{|\beta|-|\alpha|} = (-1)^{|\beta|-|\alpha|}.$$

Здесь для выражения, выделенного синим цветом, мы воспользовались предположением индукции; выражение, выделенное зеленым цветом, равно нулю по свойствам сумм биномиальных коэффициентов.

Функция Мёбиуса на множестве всех подмножеств $P(A)$

Следствие 1.1 (функция Мёбиуса множестве всех подмножеств $P(A)$). *Функция Мёбиуса $\mu(X, Y)$ на множестве всех подмножеств $P(A)$ конечного множества A, $|A| = n$, имеет вид:*

$$\mu(X, Y) = \begin{cases} (-1)^{|Y|-|X|}, & \text{если } X \subseteq Y; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Свойства функции Мёбиуса

Лемма 2 . *Для любых x, y, таких, что $x \leq y$, выполнено:*

$$\sum_{z:\ x \leq z \leq y} \mu(z, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y; \\ 0, & \text{если } x < y. \end{cases}$$

Доказательство проведем индукцией по наибольшей длине цепи с наименьшим элементом x и наибольшим элементом y.

Базис индукции $(x = y)$ верен по определению функции Мёбиуса.

Свойства функции Мёбиуса

Доказательство (продолжение). *Индуктивный переход*. Пусть $x < y$. Тогда

$$\sum_{z:\ x \le z \le y} \mu(z,y) = \mu(y,y) + \sum_{z:\ x \le z < y} \mu(z,y) =$$

$$= \mu(y,y) + \sum_{z:\ x \le z < y} \left(- \sum_{u:\ z \le u < y} \mu(z,u) \right) =$$

$$= 1 - \sum_{z,u:\ x \le z \le u < y} \mu(z,u) = 1 - \sum_{u:\ x \le u < y} \sum_{z:\ x \le z \le u} \mu(x,u) =$$

$$= 1 - \mu(x,x) - \sum_{u:\ x < u < y} \sum_{z:\ x \le z \le u} \mu(x,u) = 0.$$

Выражение, выделенное красным цветом, равно нулю по предположению индукции.

Формула обращения Мёбиуса

Важность функции Мёбиуса определяется следующей теоремой, позволяющей обращать операцию суммирования.

Теорема 3 (формула обращения Мёбиуса). *Пусть для каждого x функция f выражается через функцию g по формуле*

$$f(x) = \sum_{z \le x} g(z).$$

Тогда справедлива формула

$$g(x) = \sum_{z \le x} f(z)\mu(z, x).$$

Формула обращения Мёбиуса

Доказательство проведем, применяя лемму 2:

$$\sum_{z:\ z\leq x} f(z)\mu(z,x) = \sum_{z:\ z\leq x}\left(\sum_{u:\ u\leq z} g(u)\right)\mu(z,x) =$$

$$= \sum_{u,z:\ u\leq z\leq x} g(u)\mu(z,x) = \sum_{u:\ u\leq x} g(u) \sum_{z:\ u\leq z\leq x} \mu(z,x) =$$

$$= g(x) + \sum_{u:\ u<x} g(u) \sum_{z:\ u\leq z\leq x} \mu(z,x) = g(x).$$

Выражение, выделенное красным цветом, равно нулю по лемме 2.

$\square$

Выражение коэффициентов полинома Жегалкина

Пример 2. Применим формулу обращения Мёбиуса для получения формулы выражения коэффициентов полинома Жегалкина функции алгебры логики через ее значения.

Пусть функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ задана в виде полинома Жегалкина, т.е.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{\sigma \in E_2^n} c_f(\sigma) K_\sigma,$$

где $c_f(\sigma) \in B$ – коэффициенты, а K_σ – монотонные элементарные конъюнкции, причем $K_\sigma = \prod\limits_{s_i=1} x_i$, если $\sigma = (s_1, \ldots, s_n) \in E_2^n$, а $K_{(0,\ldots,0)} = 1$.

Выражение коэффициентов полинома Жегалкина

Пример 2 (продолжение). Тогда для кажого набора $\alpha \in E_2^n$ верно

$$f(\alpha) = \bigoplus_{\sigma \leq \alpha} c_f(\sigma).$$

Поэтому по формуле обращения Мёбиуса получаем:

$$c_f(\alpha) = \bigoplus_{\sigma \leq \alpha} f(\sigma)\mu(\sigma, \alpha).$$

Заметим, что если $\sigma \leq \alpha$, то (по лемме 1) $\mu(\sigma, \alpha) = 1 (\mathrm{mod}\ 2)$. Отсюда получаем формулу:

$$c_f(\alpha) = \bigoplus_{\sigma \leq \alpha} f(\sigma).$$

Выражение коэффициентов полинома Жегалкина

Пример 2 (продолжение). Найдем по полученной формуле полином Жегалкина функции $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$. Получаем

$$
\begin{aligned}
&c_f(0,0) = f(0,0) = 0;\\
&c_f(0,1) = f(0,0) \oplus f(0,1) = 0 \oplus 1 = 1;\\
&c_f(1,0) = f(0,0) \oplus f(1,0) = 0 \oplus 1 = 1;\\
&c_f(1,1) = f(0,0) \oplus f(0,1) \oplus f(1,0) \oplus f(1,1) = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1.
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2.$$

Пример о студентах

Рассмотрим следующую задачу.

Пример 3. При исследовании читательских интересов студентов оказалось, что 60% студентов читают журнал A, 50% – журнал B, 50% – журнал C, 30% – журналы A и B, 50% – журналы A и C, 20% – журналы B и C, 20% – журналы A, B и C.

Сколько процентов студентов не читают ни одного из журналов A, B и C?

Метод решения подобных задач дает принцип **включений-исключений**.

Формула включений-исключений

Теорема 4 (формула включений-исключений). Пусть A – конечное множество, и $A_1, \dots, A_n \subseteq A$.
Тогда

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}|.$$

Доказательство можно провести при помощи свойств биномиальных коэффициентов. Рассмотрим произвольный элемент a из множества $A_1 \cup \dots \cup A_n$.
Определим, сколько раз он будет подсчитан по формулам в утверждении теоремы 4 в левой и правой частях.

В левой части он учитывается 1 раз.

Формула включений-исключений

Доказательство (продолжение). Перейдем к правой части.

Если $a \notin A_{i_j}$ для некоторого индекса i_j, то $a \notin A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j} \cap \dots \cap A_{i_r}$. Поэтому в таких пересечениях он не учитывается.

Пусть элемент a принадлежит в точности множествам $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$. Тогда он будет содержаться во всех возможных пересечениях из этих множеств и только в них.

Число самих множеств –	$k = C_k^1$;
число их попарных пересечений –	C_k^2;
число их пересечений по три –	C_k^3;
...	
число их пересечений по k –	$1 = C_k^k$.

Формула включений-исключений

Доказательство (продолжение).
Тогда по формуле в правой части элемент a подсчитается

$$(-1)^0 C_k^1 + (-1)^1 C_k^2 + \dots + (-1)^{k-1} C_k^k \text{ раз.}$$

Воспользуемся свойствами биномиальных коэффициентов и получим:

$$\sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} C_k^r = -\left(\left(\sum_{r=1}^{k} (-1)^r C_k^r\right) +1 - 1\right) =$$

$$= -\left(\left(\sum_{r=0}^{k} (-1)^r C_k^r\right) -1\right) = 1.$$

Следовательно, в правой части каждый такой элемент учитывается тоже ровно 1 раз. □

Вывод формулы включений-исключений

Формулу включений-исключений можно доказать при помощи формулы обращения Мёбиуса.

Пусть $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Введем на подмножествах множества индексов $N = \{1, \dots, n\}$ функции $f(I)$ и $g(I)$, где $I \subseteq N$.

Вывод формулы включений-исключений

Пусть $f(\{i_1, \ldots, i_s\})$ обозначает число элементов множества A, которые могут не принадлежать каким-то из подмножеств $A_{i_1}, \ldots, A_{i_s}$, но обязаны принадлежать каждому из остальных подмножеств.

Заметим, что

$$f(N) = |A|;$$
$$f(I) = |\bigcap_{i \notin I} A_i| \text{ при } I \neq N.$$

Пусть $g(\{i_1, \ldots, i_s\})$ обозначает число элементов множества A, которые не принадлежат ни одному из подмножеств $A_{i_1}, \ldots, A_{i_s}$ и принадлежат каждому из остальных подмножеств.

Заметим, что $g(N) = 0$.

Вывод формулы включений-исключений

Тогда для каждого множества индексов $I \subseteq N$ верна формула:

$$f(I) = \sum_{J \subseteq I} g(J).$$

Применим обращение Мёбиуса и свойства функции Мёбиуса на множестве всех подмножеств:

$$0 = g(N) = \sum_{J \subseteq N} f(J)\mu(J, N) = \sum_{J \subseteq N} f(J)(-1)^{n-|J|} =$$

$$= |A| + \sum_{J \subset N} |\bigcap_{j \notin J} A_j| (-1)^{n-|J|}.$$

Отсюда

$$|A| = \sum_{J \subset N} (-1)^{n-|J|+1} |\bigcap_{j \notin J} A_j| = \sum_{\emptyset \subset I \subseteq N} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i|.$$

Решение задачи о студентах

Пример 3. Журнал А читают 60% студентов, журнал В – 50% студентов, журнал С – 50% студентов; 30% – журналы А и В, 50% – журналы А и С, 20% – журналы В и С; 20% – журналы А, В и С. Сколько процентов студентов не читают ни одного из журналов из A, B и C?

Решение. По формуле включений-исключений получаем:
$|A| = 60$; $|B| = |C| = 50$;
$|A \cap B| = 30$; $|A \cap C| = 50$; $|B \cap C| = 20$;
$|A \cap B \cap C| = 20$.
Тогда
$|A \cup B \cup C| = (60 + 50 + 50) - (30 + 50 + 20) + (20) =$
$160 - 100 + 20 = 80$.
Т.е. хотя бы один журнал читают 80% студентов. А значит, ни одного журнала не читают $100\% - 80\% = 20\%$ студентов.

Задача о ДНФ

Пример 4. Определим, на скольких наборах обращается в 1 функция алгебры логики f, заданная ДНФ

$$D = x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_4.$$

Решение. Пусть $K_i \subseteq E_4^n$ – это множество наборов куба E_4^n, на которых i-я элементарная конъюнкция равна 1, $i = 1, 2, 3$.
Тогда
$|K_1| = 2$; $|K_2| = |K_3| = 4$;
$|K_1 \cap K_2| = 0$; $|K_1 \cap K_3| = 0$; $|K_2 \cap K_3| = 2$;
$|K_1 \cap K_2 \cap K_3| = 0$.
Отсюда получаем
$|K_1 \cup K_2 \cup K_3| = (2+4+4) - (0+0+2) + (0) = 10 - 2 + 0 = 8$.
Т.е. функция f равна 1 на восьми наборах.

Продолжение задачи о студентах

Пример 3 (продолжение). В условиях этого примера можно задавать другие вопросы.

Например, сколько процентов студентов читают не менее двух журналов?

Или, сколько процентов студентов читают ровно два журнала?

Ответы на эти вопросы можно получить на основе следующих теорем.

Производные случаи формулы включений-исключений

Формула включений-исключений для числа элементов, обладающих **в точности** m свойствами:

Теорема 5. *Пусть A – конечное множество, и $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$. Тогда число элементов множества A, принадлежащих* **в точности** *m множествам из $A_1, \ldots, A_n$, где $0 \leq m \leq n$, можно найти по формуле*

$$\sum_{r=0}^{n-m} (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{m+r} \leq n} C_{m+r}^{m} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{m+r}}|.$$

Доказательство можно провести аналогично теореме 4.

Производные случаи формулы включений-исключений

Формула включений-исключений для числа элементов, обладающих **не менее**, чем m свойствами:

Теорема 6. *Пусть A – конечное множество, и $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$. Тогда число элементов множества A, принадлежащих* **не менее**, *чем m множествам из $A_1, \ldots, A_n$, где $0 \leq m \leq n$, можно найти по формуле*

$$\sum_{r=0}^{n-m} (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{m+r} \leq n} C_{m+r-1}^{m-1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{m+r}}|.$$

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Решение продолжения задачи о студентах

Пример 3. Журнал A читают 60% студентов, журнал B – 50% студентов, журнал C – 50% студентов; 30% – журналы A и B, 50% – журналы A и C, 20% – журналы B и C; 20% – журналы A, B и C.

Решение (продолжение). По формулам теорем 5 и 6 найдем ответы на поставленные вопросы.

1. Не менее двух журналов читают

$$(-1)^0 C^1_{2+0-1}(30+50+20)+(-1)^1 C^1_{2+1-1}(20) = 100-2\cdot 20 = 60$$

процентов студентов.

2. Ровно два журнала читают

$$(-1)^0 C^2_{2+0}(30+50+20)+(-1)^1 C^2_{2+1}(20) = 100-3\cdot 20 = 40$$

процентов студентов.

Формула для симметрической разности

Теорема 7 (формула для симметрической разности). Пусть A – конечное множество, и $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$.
Тогда

$$|A_1 \triangle \ldots \triangle A_n| = \sum_{r=1}^{n} (-2)^{r-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}|.$$

Доказательство проведем при помощи свойств биномиальных коэффициентов. Рассмотрим произвольный элемент a из множества $A_1 \triangle \ldots \triangle A_n$.
Определим, сколько раз он будет подсчитан по формулам в утверждении теоремы 7 в левой и правой частях.

Если $a \notin A_{i_j}$ для некоторого индекса i_j, то $a \notin A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j} \cap \cdots \cap A_{i_r}$. Поэтому в таких пересечениях он не учитывается.

Формула для симметрической разности

Доказательство (продолжение). Пусть элемент a принадлежит в точности множествам $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$.

В левой части элемент a не учитывается, если k – четно, и учитывается один раз, если k – нечетно.

Перейдем к правой части. Элемент a содержится во всех возможных пересечениях из множеств $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ и только в них.

Число самих множеств –	$k = C_k^1$;
число их попарных пересечений –	C_k^2;
число их пересечений по три –	C_k^3;
...	
число их пересечений по k –	$1 = C_k^k$.

Тогда по формуле в правой части элемент a подсчитается

$$(-2)^0 C_k^1 + (-2)^1 C_k^2 + \dots + (-2)^{k-1} C_k^k \text{ раз.}$$

Формула для симметрической разности

Доказательство (продолжение). Применим свойства биномиальных коэффициентов и получим:

$$\sum_{r=1}^{k}(-2)^{r-1}C_k^r = -\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\sum_{r=1}^{k}(-2)^r C_k^r\right) + 1 - 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\sum_{r=0}^{k}(-2)^r C_k^r\right) - 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left((-2+1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0, & k - \text{ четно,} \\ 1, & k - \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Следовательно, в правой части также элемент a не учитывается, если k – четно, и учитывается один раз, если k – нечетно. □

Задача о полиноме Жегалкина

Пример 5. Определим, на скольких наборах обращается в 1 функция алгебры логики f, заданная полиномом Жегалкина

$$P = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_4 \oplus x_2x_4.$$

Решение. Пусть $K_i \subseteq E_4^n$ – это множество наборов куба E_4^n, на которых i-я монотонная элементарная конъюнкция равна 1, $i = 1, 2, 3$. Тогда

$|K_1| = 2$; $|K_2| = |K_3| = 4$;

$|K_1 \cap K_2| = 1$; $|K_1 \cap K_3| = 1$; $|K_2 \cap K_3| = 2$;

$|K_1 \cap K_2 \cap K_3| = 1$.

Отсюда получаем

$|K_1 \triangle K_2 \triangle K_3| = (-2)^0 \cdot (2+4+4) + (-2)^1 \cdot (1+1+2) + (-2)^2 \cdot (1) = 10 - 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 10 - 8 + 4 = 6.$

Т.е. функция f равна 1 на шести наборах.

Задача о числе перестановок-“беспорядков”

Пример 6. Применим формулу включения-исключения для подсчета числа перестановок-**“беспорядков”**.

Перестановка $i_1, i_2, \dots, i_n$ элементов $1, 2, \dots, n$ называется **“беспорядком”**, если $i_j \neq j$ для каждого $j = 1, \dots, n$.

Другими словами, никакой элемент не стоит на “своем” месте.

Например, перестановка $2, 3, 4, 5, 1$ является “беспорядком”, а перестановка $5, 4, 3, 2, 1$ им не является (почему?).

Задача состоит в подсчета числа перестановок-“беспорядков” из n элементах.

Задача о числе перестановок-"беспорядков"

Решение. Пусть A_j – это множество перестановок $i_1, i_2, \ldots, i_n$ элементов $1, 2, \ldots, n$, для которых $i_j = j$, где $j = 1, \ldots, n$.

Заметим, что $|A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_r}| = (n-r)!$ (почему?).

Тогда по формуле включений-исключений получаем:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} |A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_r}| =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} C_n^r (n-r)! = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{n!(n-r)!}{r!(n-r)!} = n! \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{r!}.$$

Задача о числе перестановок-"беспорядков"

Решение (продолжение). Но $|A_1 \cup \dots \cup A_n|$ – это число перестановок, не являющихся "беспорядками".

Поэтому для искомой величины числа перестановок-"беспорядков" $m(n)$ получаем формулу:

$$m(n) = n! - n! \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{r!} = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}.$$

Заметим, что

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} = e^{-1}.$$

Поэтому

$$\frac{m(n)}{n!} \to \frac{1}{e} \text{ при } n \to \infty$$

Т.е. доля "беспорядков" среди всех перестановок стремится к величине $\frac{1}{e}$ с ростом n.

Задачи для самостоятельного решения

1. [2] Гл. VIII 2.1–2.9.

2. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ – **все** простые числа от 1 до $\lfloor\sqrt{N}\rfloor$. Найдите формулу для подсчета количества простых чисел от 1 до N.

3. Четыре человека сдают шляпы в гардероб. В предположении, что шляпы возвращаются наугад, найти вероятность того, что **ровно** k $(0 \leq k \leq 4)$ человек получат свою шляпу обратно.

4. Докажите формулы для числа элементов, обладающих в точности m свойствами (теорема 5), и для числа элементов, обладающих не менее, чем m свойствами (теорема 6).

Литература к лекции

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. Ч. II п. 3.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

Конец лекции