# Математическая логика и логическое программирование

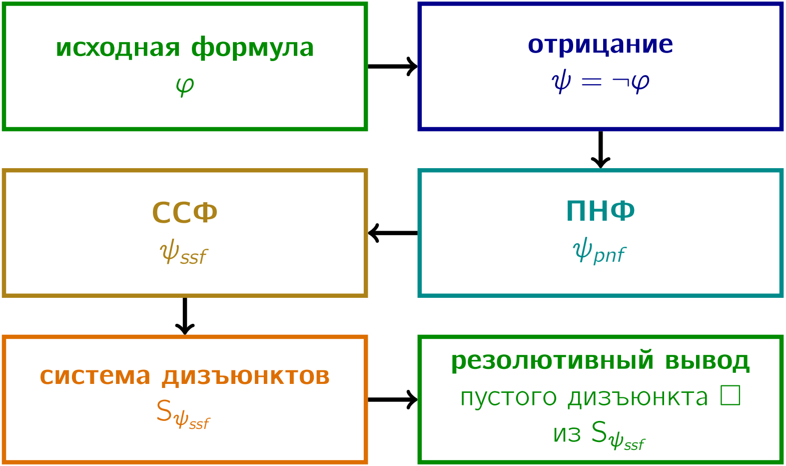
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 23

Обоснование общезначимости формулы методом резолюций (пример)

Лектор:
**Подымов Владислав Васильевич**
E-mail:
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2024/2025, осенний семестр




$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

$$\Leftarrow \quad \text{существует вывод } \square \text{ из } S_{\psi_{ssf}}$$

Примеры, которые использовались при обсуждении этапов метода резолюций, выбирались так, чтобы при их совмещении получился сквозной пример: обоснование общезначимости формулы

$$\exists x\ (P(x)\,\&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

методом резолюций

Запишем получившееся обоснование от начала и до конца

*Этап 1:* поставить отрицание

$$\models \exists x\ (P(x)\,\&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \neg\exists x\ (P(x)\,\&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

$$\models \exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists y\,R(x,y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists y\,R(x,y))$$

*Этап 2:* построить равносильную ПНФ

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists y\,R(x,y))$$

$\sim$ (*переименование переменных*)

$$\neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall z\,P(z) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists u\,R(x,u))$$

$\sim$ (*удаление импликаций*)

$$\neg\exists x\,(\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\,P(z) \vee \exists y\,R(x,y))) \vee \exists u\,R(x,u))$$

$\sim$ (*продвижение отрицаний*)

$$\forall x\,(P(x)\,\&(\exists z\,\neg P(z) \vee \exists y\,R(x,y))\,\&\,\forall u\,\neg R(x,u))$$

$\sim$ (*вынесение кванторов*)

$$\forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$\sim$ (*получение КНФ*)

$$\forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\models \exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists y\,R(x,y))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\not\models \forall x\,\exists z\,\exists y\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(z) \lor R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

*Этап 3:* построить ССФ, применив алгоритм сколемизации

$$\not\models \forall x\,\underline{\exists z}\,\underline{\exists y}\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(\underline{z}) \lor R(x,\underline{y}))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \forall x\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \lor R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

*Этап 4:* перейти к системе дизъюнктов

$$\not\models \forall x\,\forall u\,(P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \lor R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \{P(x),\ \neg P(\mathbf{f}(x)) \lor R(x,\mathbf{g}(x)),\ \neg R(x,u)\}$$

$$\models \exists x\, (P(x) \,\&\, (\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \{P(x), \quad \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)), \quad \neg R(x,u)\}$$

*Этап 5:* резолютивно вывести $\square$

$$P(x_1) \qquad \neg P(\mathbf{f}(x_2)) \vee R(x_2, \mathbf{g}(x_2)) \qquad R(x_3, \mathbf{g}(x_3)) \qquad \neg R(x_4, u_4) \longrightarrow \square$$

Оказалось, что $\square$ резолютивно выводи́м из построенной системы дизъюнктов

Следовательно (по спектру доказанных ранее теорем), исходная формула

$$\exists x\, (P(x) \,\&\, (\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))$$

общезначима