

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 36

Теорема Чёрча

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Вступление

Проблема общезначимости формул логики предикатов — это задача распознавания **Valid** следующего вида:

- ▶ На вход подаётся пара (σ, φ) , где
 - ▶ σ — произвольная сигнатура логики предикатов и
 - ▶ φ — произвольная формула логики предикатов сигнатуры σ
- ▶ **Valid** $(\sigma, \varphi) = 1 \Leftrightarrow \models \varphi$

Проблема останова машин Тьюринга — это задача распознавания **Halt** следующего вида:

- ▶ На вход подаётся пара (M, w) , где
 - ▶ M — произвольная машина Тьюринга и
 - ▶ w — произвольное ленточное слово (для M)
- ▶ **Halt** $(M, w) = 1 \Leftrightarrow$ вычисление M на слове w конечно

Лемма о сведении проблемы останова

Проблема останова машин Тьюринга m -сводится к проблеме общезначимости формул логики предикатов

Доказательство.

По определению m -сводимости, достаточно предложить такой алгоритм \mathcal{A} :

- ▶ Вход: произвольная МТ M и произвольное ленточное слово w
- ▶ Выход: сигнатура $\sigma_{M,w}$ и формула $\varphi_{M,w}$ этой сигнатуры
- ▶ Выход $\bar{\mathcal{A}}(M, w) = (\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w})$ устроен так:
$$\models \varphi_{M,w} \Leftrightarrow \text{МТ } M \text{ останавливается на } w$$

Сигнатуру $\sigma_{M,w}$ устро́им так:

- ▶ Константы: $\mathcal{A} \cup \mathcal{Q} \cup \{\perp\}$, где $\perp \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{Q}$
- ▶ Единственный функциональный символ: \cdot ⁽²⁾
 - ▶ Считаем этот символ ассоциативным вправо: $x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- ▶ Единственный предикатный символ: Re ⁽³⁾

Лемма о сведении проблемы останова

Доказательство. $M = (\mathcal{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P}), w \in \mathcal{A}^* \rightsquigarrow \sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}$

Назовём конфигурацию σ **достижимой**, если она содержится в вычислении M на w :

- ▶ Конфигурация $(\Lambda, q_0, w\Lambda)$ достижима
- ▶ Если конфигурация σ достижима и $\sigma \rightarrow_M \sigma'$, то конфигурация σ' достижима
- ▶ Других достижимых конфигураций нет

Тогда $\mathbf{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow$

существует достижимая заключительная конфигурация

Ленточному слову $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$ сопоставим терм

$$\tau_\alpha = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \cdot \perp$$

Конфигурации $\sigma = (\alpha, q, \beta)$ МТ M сопоставим тройку термов

$\tau_\sigma = (\tau_{\alpha^-}, q, \tau_\beta)$, где α^- — **зеркальный образ** слова α :

если $\alpha = a_1 a_2 \dots a_k$, то $\alpha^- = a_k \dots a_2 a_1$

Фразе «конфигурация σ достижима» сопоставим атом $\text{Re}(\tau_\sigma)$

Лемма о сведении проблемы останова

Доказательство. $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P}), w \in \mathfrak{A}^* \rightsquigarrow \sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}$

Каждому правилу $C, C \in \mathcal{P}$, сопоставим формулу ψ_C :

- ▶ Если $C = (q, a, b, R, p)$, то $\psi_C = \psi_C^{R1} \& \psi_C^{R2}$, где
$$\psi_C^{R1} = \forall \alpha \forall \beta \forall x (\text{Re}(\alpha, q, a \cdot x \cdot \beta) \rightarrow \text{Re}(b \cdot \alpha, p, x \cdot \beta))$$
$$\psi_C^{R2} = \forall \alpha (\text{Re}(\alpha, q, a \cdot \perp) \rightarrow \text{Re}(b \cdot \alpha, p, \Lambda \cdot \perp))$$

- ▶ Если $C = (q, a, b, L, p)$, то $\psi_C = \psi_C^{L1} \& \psi_C^{L2}$, где
$$\psi_C^{L1} = \forall \alpha \forall x \forall \beta \forall y (\text{Re}(y \cdot x \cdot \alpha, q, a \cdot \beta) \rightarrow \text{Re}(x \cdot \alpha, p, y \cdot b \cdot \beta))$$
$$\psi_C^{L2} = \forall \beta \forall y (\text{Re}(y \cdot \perp, q, a \cdot \beta) \rightarrow \text{Re}(\Lambda \cdot \perp, p, y \cdot b \cdot \beta))$$

По определению отношения \rightarrow_C ,

если $\sigma \rightarrow_C \sigma'$, то $\psi_C \models \text{Re}(\tau_\sigma) \rightarrow \text{Re}(\tau_{\sigma'})$,

а значит, и $\psi_C, \text{Re}(\tau_\sigma) \models \text{Re}(\tau_{\sigma'})$

Программе \mathcal{P} сопоставим формулу $\psi_{\mathcal{P}} = \big\&_{C \in \mathcal{P}} \psi_C$

По определению отношения \rightarrow_M ,

если $\sigma \rightarrow_M \sigma'$, то $\psi_{\mathcal{P}}, \text{Re}(\tau_\sigma) \models \text{Re}(\tau_{\sigma'})$

Лемма о сведении проблемы останова

Доказательство. $M = (\mathcal{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P}), w \in \mathcal{A}^* \rightsquigarrow \sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}$

Формулу $\varphi_{M,w}$ зададим так: $\varphi_{M,w} = \psi_0 \& \psi_{\mathcal{P}} \rightarrow \psi_f$, где

- ▶ $\psi_0 = \text{Re}(\tau_{(\Lambda, q_0, w\Lambda)})$ («конфигурация $(\Lambda, q_0, w\Lambda)$ достижима»)
- ▶ $\psi_f = \exists \alpha \exists \beta \text{Re}(\alpha, q_f, \beta)$
(«существует достижимая заключительная конфигурация»)

Осталось показать, что $\text{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow \text{Valid}(\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}) = 1$

Но перед этим небольшой **пример** (иллюстрация)

Пусть $M = (\{0, 1\}, 0, \{q_0, q_f\}, q_0, q_f, \mathcal{P})$, где

$$\mathcal{P}(q_0, 0) = (1, R, q_0) \quad \text{и} \quad \mathcal{P}(q_0, 1) = (0, L, q_f)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_{M,1011} &= \text{Re}(0 \cdot \perp, q_0, 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \perp) \\ &\& \forall \alpha \forall \beta \forall x (\text{Re}(\alpha, q_0, 0 \cdot x \cdot \beta) \rightarrow \text{Re}(1 \cdot \alpha, q_0, x \cdot \beta)) \\ &\& \forall \alpha (\text{Re}(\alpha, q, 0 \cdot \perp) \rightarrow \text{Re}(1 \cdot \alpha, q_0, 0 \cdot \perp)) \\ &\& \forall \alpha \forall x \forall \beta \forall y (\text{Re}(y \cdot x \cdot \alpha, q_0, 1 \cdot \beta) \rightarrow \text{Re}(x \cdot \alpha, q_f, y \cdot 0 \cdot \beta)) \\ &\& \forall \beta \forall y (\text{Re}(y \cdot \perp, q_0, 1 \cdot \beta) \rightarrow \text{Re}(0 \cdot \perp, q_f, y \cdot 0 \cdot \beta)) \\ &\rightarrow \exists \alpha \exists \beta \text{Re}(\alpha, q_f, \beta) \end{aligned}$$

Лемма о сведении проблемы останова

Доказательство. $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P}), w \in \mathfrak{A}^* \rightsquigarrow \sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}$

$\varphi_{M,w} = \psi_0 \& \psi_{\mathcal{P}} \rightarrow \psi_f; \psi_0 = \text{Re}(\tau_{(\Lambda, q_0, w\Lambda)}); \psi_f = \exists \alpha \exists \beta \text{Re}(\alpha, q_f, \beta)$

$\text{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow \text{Valid}(\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}) ?$

(\Leftarrow) Пусть $\models \varphi_{M,w}$

Тогда формула $\varphi_{M,w}$ выполняется в такой интерпретации \mathcal{I} :

- ▶ предметная область — все ленточные слова и состояния МТ M
- ▶ значения термов устроены так, как это обсуждалось ранее
- ▶ $\overline{\text{Re}}(t_\alpha, t_q, t_\beta) = \dagger \Leftrightarrow$
тройка (t_α, t_q, t_β) соответствует достижимой конфигурации

Тогда верно $\mathcal{I} \models \psi_0 \& \psi_{\mathcal{P}}$:

« $\psi_0 \& \psi_{\mathcal{P}}$ » — это формульная запись определения достижимости

Значит, верно и $\mathcal{I} \models \psi_f$:

существует достижимая заключительная конфигурация

Лемма о сведении проблемы останова

Доказательство. $M = (\mathfrak{A}, \Lambda, \mathcal{Q}, q_0, q_f, \mathcal{P}), w \in \mathfrak{A}^* \rightsquigarrow \sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}$

$\varphi_{M,w} = \psi_0 \ \& \ \psi_{\mathcal{P}} \rightarrow \psi_f; \psi_0 = \text{Re}(\tau_{(\Lambda, q_0, w\Lambda)}); \psi_f = \exists \alpha \exists \beta \text{Re}(\alpha, q_f, \beta)$

$\text{Halt}(M, w) = 1 \Leftrightarrow \text{Valid}(\sigma_{M,w}, \varphi_{M,w}) ?$

(\Rightarrow) Рассмотрим (конечное) вычисление M на w :

$$(\Lambda, q_0, w\Lambda) \rightarrow_M (\alpha_1, q_1, \beta_1) \rightarrow_M \cdots \rightarrow_M (\alpha_n, q_n, \beta_n); q_n = q_f$$

Справедливы следующие соотношения:

- ▶ $\psi_0, \psi_{\mathcal{P}} \models \text{Re}(\tau_{(\alpha_1, q_1, \beta_1)})$
- ▶ $\text{Re}(\tau_{(\alpha_1, q_1, \beta_1)}), \psi_{\mathcal{P}} \models \text{Re}(\tau_{(\alpha_2, q_2, \beta_2)})$
- ▶ ...
- ▶ $\text{Re}(\tau_{(\alpha_{n-1}, q_{n-1}, \beta_{n-1})}), \psi_{\mathcal{P}} \models \text{Re}(\tau_{(\alpha_n, q_f, \beta_n)})$

При этом $\text{Re}(\tau_{(\alpha_n, q_f, \beta_n)}) \models \exists \alpha \exists \beta \text{Re}(\alpha, q_f, \beta)$

Следовательно, $\psi_0, \psi_{\mathcal{P}} \models \psi_f$

По **теореме о логическом следствии**, верно и $\models \psi_0 \ \& \ \psi_{\mathcal{P}} \rightarrow \psi_f \blacktriangledown$

Теорема Чёрча

Проблема общезначимости формул логики предикатов неразрешима

Доказательство.

По лемме о сведении проблемы останова, проблема останова МТ (**Halt**) m -сводится к проблеме общезначимости формул логики предикатов (**Valid**)

Известно, что проблема **Halt** неразрешима

Значит, по следствию из теоремы об m -сводимости, неразрешима и проблема **Valid** ▼