

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 36

Аксиоматические теории первого порядка
Проблема общезначимости формул в теории

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Вступление

Утверждение. $1 + 1 = 2$

Попробуем применить логику для доказательства этого утверждения

“ $1 + 1 = 2$ ” — это **формула логики предикатов**, в которой

- ▶ 1 и 2 — константы
- ▶ $+$ ⁽²⁾ — функциональный символ
- ▶ $=$ ⁽²⁾ — предикатный символ

В рамках утверждения эти символы имеют *арифметический* смысл: числа 1 и 2, операция сложения и отношение равенства чисел

Попробуем записать этот смысл, используя логическую терминологию

Вступление

Утверждение. $1 + 1 = 2$

Определение. 2 — это целое число, следующее за 1

$$\mathfrak{A}_2: 2 = s(1)$$

("s(t)" = "(t + 1)")

Определение. 1 — это целое число, следующее за 0

$$\mathfrak{A}_1: 1 = s(0)$$

Определение. 0 — это ... *не потребуется определять отдельно*

Остановимся на такой сигнатуре: $\langle \{0, 1, 2\}, \{s^{(1)}, +^{(2)}\}, \{=^{(2)}\} \rangle$

Операцию сложения чисел из \mathbb{N}_0 (+) можно определить существенно разными способами, и в том числе так:

Определение. + — это двуместная операция, обладающая следующими свойствами:

$$\mathfrak{A}_0^+: \forall x (x + 0 = x)$$

$$\mathfrak{A}_1^+: \forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y)) \quad (\text{т.е. } x + (y + 1) = (x + y) + 1)$$

Вступление

Утверждение. $1 + 1 = 2$

Про отношение равенства чисел из $\mathbb{N}_0 (=)$ прежде всего следует знать, что это *отношение эквивалентности*:

\mathcal{A}_r^- : $\forall x (x = x)$ (рефлексивность)

\mathcal{A}_s^- : $\forall x \forall y ((x = y) \rightarrow (y = x))$ (симметричность)

\mathcal{A}_t^- : $\forall x \forall y \forall z ((x = y) \& (y = z) \rightarrow (x = z))$ (транзитивность)

Отношение $=$ обладает и другими важными свойствами, и среди них понадобятся такие:

\mathcal{A}_s^- : $\forall x \forall y ((x = y) \rightarrow (s(x) = s(y)))$
(числа, следующие за равными, равны)

\mathcal{A}_+^- : $\forall x \forall y \forall u \forall v ((x = u) \& (y = v) \rightarrow (x + y = u + v))$
(если числа в сумме заменить на равные, то получится равный результат)

Вступление

Утверждение. $1 + 1 = 2$

Если принять упомянутые определения и свойства без доказательства, то обосновать утверждение можно, например, так:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A}_0^+ & \models & 1 + 0 = 1 & (\varphi_1) \\ \varphi_1, \mathfrak{A}_s^- & \models & \mathbf{s}(1 + 0) = \mathbf{s}(1) & (\varphi_2) \\ \mathfrak{A}_1^+ & \models & 1 + \mathbf{s}(0) = \mathbf{s}(1 + 0) & (\varphi_3) \\ \varphi_2, \varphi_3, \mathfrak{A}_t^- & \models & 1 + \mathbf{s}(0) = \mathbf{s}(1) & (\varphi_4) \\ \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_r^-, \mathfrak{A}_+^- & \models & 1 + 1 = 1 + \mathbf{s}(0) & (\varphi_5) \\ \varphi_4, \varphi_5, \mathfrak{A}_t^- & \models & 1 + 1 = \mathbf{s}(1) & (\varphi_6) \\ \varphi_6, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_s^-, \mathfrak{A}_t^- & \models & 1 + 1 = 2 & (\varphi_7) \end{array}$$

Следовательно, $\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_0^+, \mathfrak{A}_1^+, \mathfrak{A}_r^-, \mathfrak{A}_s^-, \mathfrak{A}_t^-, \mathfrak{A}_s^-, \mathfrak{A}_+^-\} \models (1 + 1 = 2)$

И как это доказывает, что один плюс один — действительно два?

Вступление

$$\sigma = \langle \{0, 1, 2\}, \{\mathbf{s}^{(1)}, +^{(2)}\}, \{=^{(2)}\} \rangle$$

$$\Gamma = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_0^+, \mathfrak{A}_1^+, \mathfrak{A}_r^-, \mathfrak{A}_s^-, \mathfrak{A}_t^-, \mathfrak{A}_s^-, \mathfrak{A}_+^-\}$$

$$\Gamma \models (1 + 1 = 2)$$

Рассмотрим такую интерпретацию \mathcal{I} сигнатуры σ :

- ▶ предметная область — \mathbb{N}_0
- ▶ символы 0, 1, 2, s, +, = оцениваются естественным образом

Если принять без доказательства,

что $\mathcal{I} \models \varphi$ для любой формулы φ из Γ ,

то *по определению логического следования* будет верно и $\mathcal{I} \models (1 + 1 = 2)$

При этом “ $\mathcal{I} \models (1 + 1 = 2)$ ” содержательно прочитывается так:

если символы 1, 2, + и = имеют естественный арифметический смысл, то формула $(1 + 1 = 2)$ действительно верна (*выполняется*)

Вступление

$$\sigma = \langle \{0, 1, 2\}, \{\mathbf{s}^{(1)}, +^{(2)}\}, \{=^{(2)}\} \rangle$$

$$\Gamma = \{ \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_0^+, \mathfrak{A}_1^+, \mathfrak{A}_r^-, \mathfrak{A}_s^-, \mathfrak{A}_t^-, \mathfrak{A}_s^-, \mathfrak{A}_+^- \} \quad \Gamma \models (1 + 1 = 2)$$

Сигнатурой σ задана совокупность понятий, которые допускается использовать в формулировке высказываний

Множеством Γ задан набор основных свойств совокупности σ , не требующих доказательства

(такие свойства нередко называют **аксиомами**)

Формула φ — это высказывание, справедливость которого *обосновывается* с использованием аксиом (такие высказывания нередко называют **теоремами**)

Набор аксиом заданной сигнатуры, предназначенный для формулировки и доказательства теорем, в логике принято называть **аксиоматической теорией**

Если аксиомами и теоремами являются формулы логики предикатов первого порядка, то такую теорию принято называть

аксиоматической теорией первого порядка

Аксиоматические теории

Выберем сигнатуру σ алфавита логики предикатов

Теория¹ \mathcal{T} сигнатуры σ — это множество предложений (*этой сигнатуры*)

Формулы, принадлежащие теории \mathcal{T} , называются **аксиомами** этой теории

Логические следствия теории \mathcal{T} называются **теоремами** этой теории

Если теория ясна из контекста, то будем *теоремы теории* называть просто *теоремами*

¹ Полное название: **аксиоматическая теория первого порядка**

Аксиоматические теории

Формула φ **общезначима** в теории \mathcal{T} , если $\forall \tilde{x}^n \varphi(\tilde{x}^n)$ — теорема

Другое название: **\mathcal{T} -общезначима**

Обозначение: $\models_{\mathcal{T}} \varphi$

Формула φ **невыполнима** в теории \mathcal{T} , если формула $\neg\varphi$ \mathcal{T} -общезначима

Другое название: **\mathcal{T} -невыполнима**

Обозначение: $\not\models_{\mathcal{T}} \varphi^1$

Формула φ **выполнима** в теории \mathcal{T} ,

если она не является \mathcal{T} -невыполнимой

Другое название: **\mathcal{T} -выполнима**

Обозначение: $\models_{\mathcal{T}} \varphi^1$

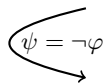
¹ Как и раньше, это обозначение общеизвестно, его придумал я, чтобы сэкономить место на слайдах

Аксиоматические теории

Достаточно исследовать только одно из трёх свойств (общезначимость, выполнимость, невыполнимость в теории):

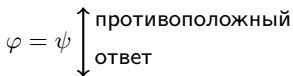
Утверждение

формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ \mathcal{T} -общезначима



предложение $\psi = \forall \tilde{x}^n \varphi(\tilde{x}^n)$ \mathcal{T} -общезначимо

формула $\psi(\tilde{x}^n)$ \mathcal{T} -невыполнима



предложение $\varphi = \exists \tilde{x}^n \psi(\tilde{x}^n)$ \mathcal{T} -невыполнимо

формула $\varphi(\tilde{x}^n)$ \mathcal{T} -выполнима

предложение $\psi = \exists \tilde{x}^n \varphi(\tilde{x}^n)$ \mathcal{T} -выполнимо

Доказательство. Напрямую следует из определений \mathcal{T} -выполнимости, \mathcal{T} -невыполнимости и \mathcal{T} -общезначимости

Аксиоматические теории

Пример:

$$\begin{aligned}\sigma &= \langle \{0, 1, 2\}, \{s^{(1)}, +^{(2)}\}, \{=^{(2)}\} \rangle \\ \Gamma &= \{a_1, a_2, a_0^+, a_1^+, a_r^-, a_s^-, a_t^-, a_s^-, a_+^-\} \\ \varphi &: (1 + 1 = 2)\end{aligned}$$

Γ — теория сигнатуры σ

$\models_{\Gamma} \varphi$, а значит, предложение φ является Γ -общезначимым

$\mathcal{I}_{ar}^{\sigma} \models \Gamma$, но $\mathcal{I}_{ar}^{\sigma} \not\models \neg\varphi$, а значит, $\Gamma \not\models \neg\varphi$, и

- ▶ предложение $\neg\varphi$ не является Γ -общезначимым
- ▶ предложение φ не является Γ -невыполнимым
- ▶ предложение φ является Γ -выполнимым

$\models_{\Gamma} \neg\neg\varphi$, а значит,

- ▶ предложение $\neg\varphi$ является Γ -невыполнимым
- ▶ предложение $\neg\varphi$ не является Γ -выполнимым

Проблема общезначимости формул в теории \mathcal{T}
формулируется так:

для заданной формулы φ проверить,
является ли эта формула \mathcal{T} -общезначимой:

$$\models_{\mathcal{T}} \varphi ?$$