Лекция: Теорема Анселя о разбиениии n-мерного куба на цепи. Теорема о числе монотонных функций алгебры логики. Теорема о расшифровке монотонных функций алгебры логики.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по "Избранным вопросам дискретной математики".
3-й курс, группа 318,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.su

Разбиение n-мерного куба на цепи

По теоремам Дилуорса и о ширине куба B^n куб B^n можно разбить на $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ цепей.

А как можно устроить такое разбиение?

Ответ на этот вопрос дает теорема Анселя.

Теорема Анселя

Теорема 1 (Анселя (Hansel)). *При $n \geq 1$ куб B^n можно разбить на $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ цепей со следующими свойствами:*
1) количество цепей длины $n - 2p + 1$ в точности равно $C_n^p - C_n^{p-1}$, $p = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;
2) в наименьшей вершине цепи длины $n - 2p + 1$ содержится p единиц и $(n - p)$ нулей, в наибольшей ее вершине содержится $(n - p)$ единиц и p нулей;
3) для произвольных наборов $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ цепи длины $n - 2p + 1$ вида

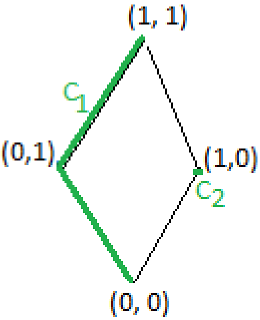
$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, 0, a_{j+1}, \ldots, a_n);\\
\alpha_2 &= (a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, 1, a_{j+1}, \ldots, a_n);\\
\alpha_3 &= (a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, 1, a_{j+1}, \ldots, a_n);
\end{aligned}$$

набор β вида $\beta = (a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, 0, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ принадлежит цепи длины $n - 2p - 1$ $(i \neq j)$.

Теорема Анселя

Доказательство проведем индукцией по n.

Базис индукции: $n = 2$. Разобьем куб B^2 на 2 цепи:
$C_1 = \{(0,0) < (0,1) < (1,1)\}$; $C_2 = \{(1,0)\}$.



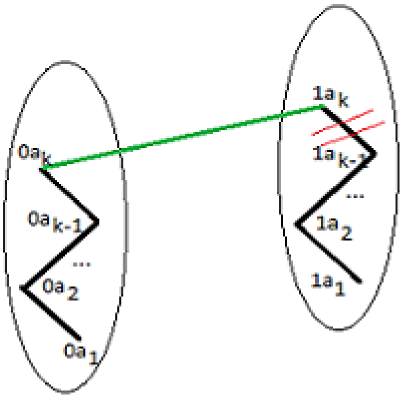
Теорема Анселя

Доказательство (продолжение).

Индуктивный переход. Рассмотрим куб B^{n+1}. Его можно построить из двух кубов B^n.
По индуктивному предположению разбиение на цепи в кубах B^n уже построено.
Разобьем куб B^{n+1} на цепи по следующим правилам:
возьмем в двух кубах B^n **одинаковые** цепи и первую из них (с первой координатой 0) **дополним** наибольшим элементом второй цепи (с первой координатой 1);
соответственно, из второй цепи **удалим** ее наибольший элемент.

Теорема Анселя

Доказательство (продолжение). Из двух одинаковых цепей C в кубах B^n получаем цепи
$C_1 = \{(0, a_1) < (0, a_2) < \cdots < (0, a_{k-1}) < (0, a_k) < (1, a_k)\}$ и
$C_2 = \{(1, a_1) < (1, a_2) < \cdots < (1, a_{k-1})\}$ в кубе B^{n+1}.



Теорема Анселя

Доказательство (продолжение). Докажем, что построенное разбиение на цепи удовлетворяет свойствам 1)-3).

1) Каким образом можно получить цепь длины $(n+1)-2p+1$ в кубе B^{n+1}?
Надо либо цепь длины $n-2p+1$ в кубе B^n **увеличить** на один элемент, либо цепь длины $n-2p+3=n-2(p-1)+1$ в кубе B^n **уменьшить** на один элемент.
По предположению индукции первых цепей в кубе B^n в точности $C_n^p - C_n^{p-1}$, вторых цепей – $C_n^{p-1} - C_n^{p-2}$.
Поэтому цепей длины $(n+1)-2p+1$ в кубе B^{n+1} появится в точности

$$(C_n^p - C_n^{p-1}) + (C_n^{p-1} - C_n^{p-2}) = (C_n^p + C_n^{p-1}) - (C_n^{p-1} + C_n^{p-2}) =$$

$$= C_{n+1}^p - C_{n+1}^{p-1}.$$

Т.е. столько, сколько требуется в теореме.

Теорема Анселя

Доказательство (продолжение). Докажем, что построенное разбиение на цепи удовлетворяет свойствам 1)-3).

2) Свойство 2) непосредственно проверяется.

Теорема Анселя

Доказательство (продолжение). Докажем, что построенное разбиение на цепи удовлетворяет свойствам 1)-3).

3) Если наборы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ принадлежат и цепи в кубе B^n, то свойство 3) выполняется по предположению индукции. Осталось рассмотреть случай, когда

$$\alpha_1 = (0, a_{k-1}),\ \ \alpha_2 = (0, a_k),\ \ \alpha_3 = (1, a_k),$$

где $C = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-2} < a_{k-1} < a_k\}$ – цепь в кубе B^n. Тогда $\beta = (1, a_{k-1})$, и по построению набор β лежит на цепи, меньшей на два элемента.

Теорема Анселя

Доказательство (продолжение).

Кроме того, всего цепей в кубе B^{n+1} получено

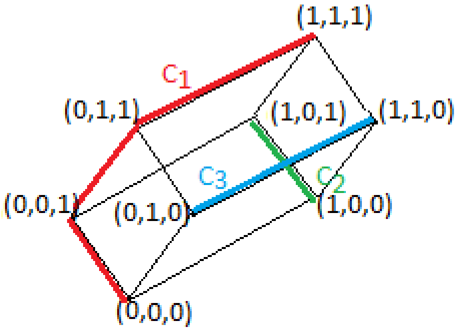
$$\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}(C_{n+1}^{p}-C_{n+1}^{p-1})=C_{n+1}^{0}-C_{n+1}^{-1}+C_{n+1}^{1}-C_{n+1}^{0}+\dots+$$

$$+\dots+C_{n+1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}-C_{n+1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor-1}=C_{n+1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}.$$

□

Разбиение куба B^3 на цепи Анселя

Цепь $C_1 = \{(0,0,0) < (0,0,1) < (0,1,1) < (1,1,1)\}$; цепь $C_2 = \{(1,0,0) < (1,0,1)\}$; цепь $C_3 = \{(0,1,0) < (1,1,0)\}$.



Применения разбиений ЧУМ на цепи

Разбиение куба B^n на цепи Анселя имеет множество применений при решениии дискретных задач.

Мы рассмотрим два из них: в задаче подсчета числа монотонных функций и в задаче расшифровки монотонных функций.

Подсчет числа объектов в классе

Знание количества объектов в некотором классе объектов (например, числа монотонных функций, зависящих от n переменных) является основой для применения **мощностного** метода.

Мощностной метод применяется, например, в логическом синтезе управляющих систем при получении нижних оценок **сложности** схемы для "самой сложной" функции в классе.

Монотонные функции алгебры логики

Напомним, что **функцией алгебры логики** от n переменных называется отображение $f : B^n \to B$, где $B = \{0, 1\}$.

Функция алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$ называется **монотонной**, если

$$\forall \alpha, \beta \in B^n (\alpha \leq \beta) \Rightarrow (f(\alpha) \leq f(\beta)).$$

Множество всех монотонных функций алгебры логики обозначается M. Обозначим как M^n множество всех монотонных функций алгебры логики, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$.

Можно ли подсчитать количество монотонных функций алгебры логики, зависящих от n переменных, т.е. найти $|M^n|$?

Оценку их числа дает следующая теорема Анселя. При этом существенно используются свойства разбиения куба B^n на цепи Анселя.

Оценка числа монотонных функций алгебры логики

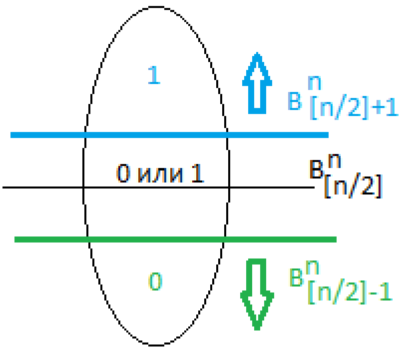
Теорема 2 (Анселя). *При* $n \geq 1$ *верно двойное неравенство*

$$2^{C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq |M^n| \leq 3^{C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}.$$

Доказательство. 1. Нижняя оценка. Возьмем куб B^n, и выделим в нем средний слой $B^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
Рассмотрим все возможные функции алгебры логики, которые
1) на всех слоях, выше среднего, принимают значение 1;
2) на всех слоях, ниже среднего, принимают значение 0;
3) на среднем слое $B^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ принимают произвольные значения (0 или 1).
Заметим, что все такие функции – монотонные. Поэтому число $|M^n|$ не меньше количества таких функций.
А их в точности $2^{C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$. Т.е. нижняя оценка получена.

Иллюстрация доказательства нижней оценки

Выше среднего слоя – значение 1; ниже среднего слоя – значение 0; на среднем слое – либо значение 0, либо значение 1.



Оценка числа монотонных функций алгебры логики

Доказательство (продолжение). 2. Верхняя оценка. Разобьем куб B^n на цепи Анселя.

Индукцией по длине цепи докажем, что на каждой из цепей Анселя монотонная функция алгебры логики может быть определена не более, чем тремя разными способами.

Оценка числа монотонных функций алгебры логики

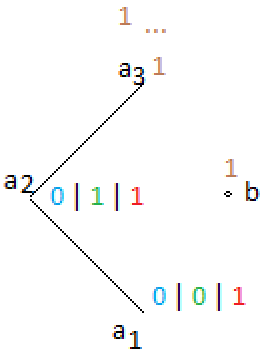
Доказательство (продолжение).
Базис индукции. В зависимости от четности n рассмотрим цепи длины 1 или 2. На цепи длины 1 монотонную функцию можно определить двумя способами. На цепи длины 2 монотонную функцию можно определить тремя способами. Базис индукции обоснован.

Оценка числа монотонных функций алгебры логики

Доказательство (продолжение).
Индуктивный переход. Рассмотрим цепь длины $n - 2p + 1$.
Выберем в ней три меньших набора $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$.
По индуктивному построению цепей Анселя, соседние элементы в них отличаются в одной координате.
Значит, эти три набора удовлетворяют условию свойства 3) цепей Анселя.
Т.е. набор β, дополняющий эти три набора до квадрата, лежит на цепи длины $n - 2(p+1) + 1$.
По индуктивному предположению, значение функции на наборе β уже определено.

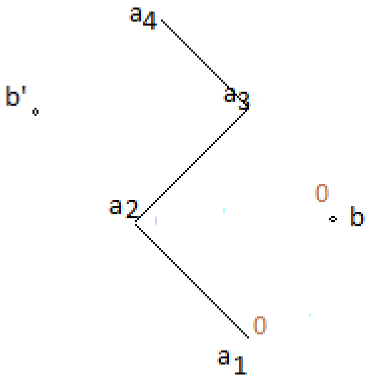
Оценка числа монотонных функций алгебры логики

Доказательство (продолжение). 1) Пусть значение функции на наборе β равно 1. Тогда всех наборах этой цепи, больших или равных набору α_3, функция тоже равна 1. На оставшихся двух наборах α_1 и α_2 функцию можно определить тремя способами.



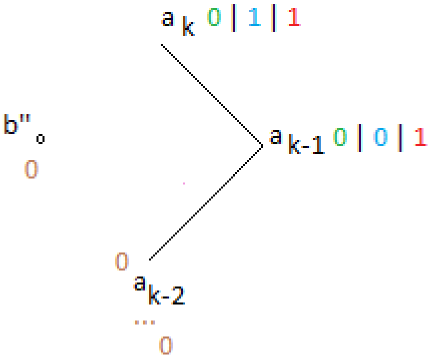
Оценка числа монотонных функций алгебры логики

Доказательство (продолжение). 2) Пусть значение функции на наборе β равно 0. Тогда на наборе α_1 функция тоже равна 0. В этом случае рассмотрим следующие три набора этой цепи $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, и повторим для них рассуждения.



Оценка числа монотонных функций алгебры логики

Доказательство (продолжение). В предельном случае мы придем к трем большим наборам этой цепи $\alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}, \alpha_k$ в ситуации, когда на наборе α_{k-2} функция тоже равна 0. Тогда на двух наборах α_{k-1} и α_k функцию можно определить тремя способами.



Оценка числа монотонных функций алгебры логики

Доказательство (продолжение).
Следовательно, на каждой из цепей Анселя мы можем определить монотонную функцию не более, чем тремя способами.
Всего цепей Анселя в точности $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
Значит, $|M^n| \leq 3^{C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$.

$\square$

Порядок логарифма числа монотонных функций алгебры логики

Следствие 2.1. *При $n \to \infty$ верно*

$$\log_2 |M^n| \asymp C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\text{или } \log_2 |M^n| \asymp \frac{2^n}{\sqrt{n}} \right).$$

Доказательство. По теореме 2 получаем

$$C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \log_2 |M^n| \leq (\log_2 3) \cdot C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Применяя свойство $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \asymp \frac{2^n}{\sqrt{n}}$, получаем вторую часть утверждения.

$\square$

Задача расшифровки объекта

Задача **расшифровки** состоит в следующем.

Нам дан черный ящик, в котором находится некоторый объект из известного множества A.

Мы можем задавать вопросы о свойствах этого объекта и получать ответы на них.

Задача состоит в том, чтобы найти, за какое **наименьшее число** вопросов мы можем **расшифровать** (т.е. однозначно определить) любой объект из множества A.

Задача расшифровки монотонных функций

В случае задачи **расшифровки монотонной функции** в черном ящике – **монотонная** функция из множества M^n.

Мы можем узнавать ее значения на произвольных наборах $\alpha \in B^n$.

Причем вопросы задаем **последовательно**, т.е. при каждом следующем вопросе можем применять знание ответов на предыдущие вопросы (**условная** расшифровка).

Задача состоит в том, чтобы определить, за какое **наименьшее число** вопросов $\psi_m(n)$ о значении функции на наборе мы можем **расшифровать** любую монотонную функцию алгебры логики, зависящую от n переменных.

Задача расшифровки монотонных функций одной и двух переменных

Пример 1.
1. Понятно, что если $n = 1$, то $\psi_m(1) = 2$, т.к. надо задать два вопроса о значениях функции на наборах (0) и (1).

2. Если $n = 2$, то $\psi_m(2) = 3$. В самом деле, узнаем значения на наборах $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Если

1) на них есть хотя бы один ноль, то расшифровывает функцию вопрос об ее значении на наборе $(1, 1)$;

2) на них две единицы, то расшифровывает функцию вопрос об ее значении на наборе $(0, 0)$.

Докажите самостоятельно, что в общем случае меньшим числом вопросов не обойтись.

Расшифровка монотонных функций алгебры логики

Теорема 3. *При* $n \geq 1$ *наименьшее число вопросов* $\psi_m(n)$ *о значении функции на наборе, которое нужно задать, чтобы расшифровать произвольную монотонную функцию алгебры логики, зависящую от* n *переменных, равно* $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$.

Расшифровка монотонных функций алгебры логики

Доказательство. 1. Нижняя оценка. Определим два множества монотонных функций M_1 и M_2.

Множество M_1 мы рассматривали при доказательстве нижней оценки числа монотонных функций.

Это функции, которые на всех слоях, выше среднего слоя, принимают значение 1; на всех слоях, ниже среднего, принимают значение 0; на среднем слое $B^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ принимают произвольные значения (0 или 1).

Множество M_2 строится аналогично, только базовым является слой $B^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$.

Оно содержит все функции, которые на всех слоях, выше слоя $B^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$, принимают значение 1; на всех слоях, ниже этого слоя, принимают значение 0; на самом слое $B^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ принимают произвольные значения (0 или 1).

Расшифровка монотонных функций алгебры логики

Доказательство (продолжение).
Заметим, что для произвольного набора $\alpha \in B^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cup B^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ найдется пара функций $f_1, f_2 \in M_1 \cup M_2$, **различающихся только на этом наборе**, т. е. $f_1(\alpha) \neq f_2(\alpha)$, но $f_1(\beta) = f_2(\beta)$ при $\beta \neq \alpha$ (Проверьте!).

Значит, при расшифровке надо задать вопросы о значениях функции на всех наборах из $B^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cup B^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$.

Т.е. $\psi_m(n) \geq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$.

Расшифровка монотонных функций алгебры логики

Доказательство (продолжение). 2. Верхняя оценка. Разобьем куб B^n на цепи Анселя.

Будем рассматривать последовательно все цепи по возрастанию их длины.

При этом, узнавая значение функции на некотором наборе α, будем находить значения функции на всех больших либо меньших наборах (в зависимости от значения функции на наборе α).

В соответствии с доказательством теоремы 2 Анселя при увеличении длины цепи на 2 есть **только два набора**, на которых монотонная функция может **определяться произвольно**.

Будем задавать вопросы о значениях функции на этих двух наборах.

В итоге, расшифруем монотонную функцию.

Расшифровка монотонных функций алгебры логики

Доказательство (продолжение). Посчитаем количество вопросов, которые мы при этом зададим.

1) Если n – четно, то наименьшая длина цепей Анселя равна 1, и таких цепей ровно $C_n^{\frac{n}{2}} - C_n^{\frac{n}{2}-1}$. Для каждой цепи будет задано по одному вопросу.

Цепей большей длины ровно $C_n^{\frac{n}{2}} - \left(C_n^{\frac{n}{2}} - C_n^{\frac{n}{2}-1}\right) = C_n^{\frac{n}{2}-1}$. Для каждой из них будет задано по два вопроса.

Поэтому всего будет задано вопросов

$$\left(C_n^{\frac{n}{2}} - C_n^{\frac{n}{2}-1}\right) + 2 \cdot C_n^{\frac{n}{2}-1} = C_n^{\frac{n}{2}} + C_n^{\frac{n}{2}+1}.$$

(Мы воспользовались свойством биномиальных коэффициентов $C_n^k = C_n^{n-k}$).

Расшифровка монотонных функций алгебры логики

Доказательство (продолжение).
2) Если же n – нечетно, то наименьшая длина цепей Анселя равна 2.

Поэтому на каждой из $C_n^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ цепей Анселя будет задано по два вопроса.

Поэтому всего будет задано вопросов

$$2 \cdot C_n^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} = C_n^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} + C_n^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}.$$

(Здесь мы воспользовались тем, что при нечетных n верно $C_n^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} = C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}} = C_n^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}$).

$\square$

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить разбиение на цепи Анселя куба B^4.

2. Подсчитать число монотонных функций алгебры логики, зависящих от n переменных при $n = 0, 1, 2, 3$.

3. [2] Гл. II 5.21–5.25.

4. Доказать, для произвольного набора $\alpha \in B^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cup B^n_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ найдется пара функций $f_1, f_2 \in M_1 \cup M_2$, различающихся только на этом наборе.

5. По доказательству теоремы 3 построить алгоритм расшифровки за 6 вопросов монотонной функции алгебры логики, зависящей от 3-х переменных.

Литература к лекции 4

1.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

Конец лекции