

# Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

## Блок 44

Темпоральные логики

Лектор:

**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:

**valdus@yandex.ru**

# Темпоральные логики

*Темпоральная логика* (логика времени) — это разновидность модальной логики, в которой модальности  $\square$  и  $\diamond$  означают “**всегда [в будущем]**” и “**когда-нибудь [в будущем]**”

Шкалой Крипке темпоральной логики описывается течение времени: миры — это **моменты времени**, а отношением достижимости миров описывается порядок смены моментов времени

**Пример:** шкала дискретного линейного отсчёта времени



Пропозициональные переменные формул темпоральных логик — это **атомарные высказывания**, истинность которых может изменяться с течением времени

# Темпоральные логики

Время может истолковываться по-разному, и в зависимости от истолкования (*то есть точного вида рассматриваемых шкал*) могут получаться разные темпоральные логики, например:

- ▶ **Логика линейного времени**

(LTL, Linear Temporal Logic)

- ▶ время дискретно линейно течёт вперёд
- ▶ формула — это свойство линейного развития событий

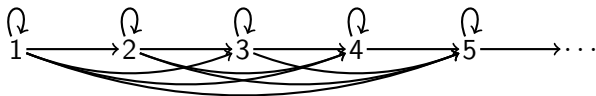
- ▶ **Логика деревьев вычислений**

(CTL, Computation Tree Logic)

- ▶ время — это частично упорядоченное множество, которым описываются все варианты развития событий
- ▶ формула — это высказывание о возможности и невозможности заданного развития событий с учётом всех вариантов

# Логика линейного времени (LTL)

**LTL-шкала** — это естественно упорядоченный натуральный ряд (моментов времени):



**LTL-интерпретация** — это модель Крипке, основанная на LTL-шкале

Модальности  $\square$  и  $\diamond$  в LTL обозначаются символами **G** (Globally) и **F** (Future)

К ним могут добавляться и другие модальности, описывающие те или иные взаимосвязи между высказываниями в неуклонно текущем времени

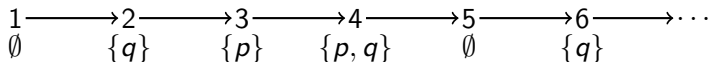
# Логика линейного времени (LTL)

Пример:



# Логика линейного времени (LTL)

**Пример:** рассмотрим такую LTL-интерпретацию  $\mathcal{I}$  с оценкой элементарных событий, повторяющейся с периодом 4:

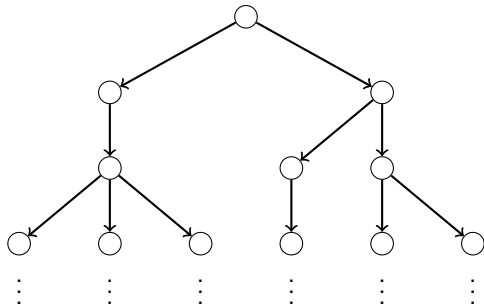


Справедливы следующие соотношения:

- ▶ в момент времени 1 неверно  $p$  и верно  $p \rightarrow q$   
 $\mathcal{I}, 1 \not\models p, \quad \mathcal{I}, 1 \models p \rightarrow q$
- ▶  $p$  иногда бывает верным, но не всегда  
 $\mathcal{I}, 1 \models \mathbf{F}p, \quad \mathcal{I}, 1 \not\models \mathbf{G}p$
- ▶  $p$  бесконечно часто бывает верным, но нет такого момента, начиная с которого  $p$  всегда верно  
 $\mathcal{I}, 1 \models \mathbf{GF}p, \quad \mathcal{I}, 1 \not\models \mathbf{FG}p$

# Логика деревьев вычислений (CTL)

Течение времени в CTL описывается ориентированным деревом, содержащим только бесконечные ветви:



**CTL-шкала** — это шкала Крипке, являющаяся рефлексивно-транзитивным замыканием такого дерева

**CTL-интерпретация** — это модель Крипке, основанная на CTL-шкале

# Логика деревьев вычислений (CTL)

В логике деревьев вычислений модальности  $\square$ ,  $\diamond$  обозначаются записями **AG** и **EF**

CTL содержит и другие модальности — например, **EG** и **AF**

Значение этих модальностей определяется так:

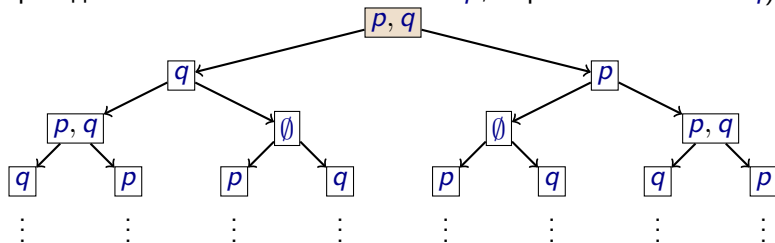
- ▶  $\mathcal{I}, v \models \mathbf{EG}\varphi \Leftrightarrow$  существует ветвь дерева, исходящая из  $v$ , такая что для каждой вершины  $v'$  этой ветви верно  $\mathcal{I}, v' \models \varphi$
- ▶  $\mathcal{I}, v \models \mathbf{AF}\varphi \Leftrightarrow$  в каждой ветви дерева, исходящей из  $v$ , существует вершина  $v'$ , такая что  $\mathcal{I}, v' \models \varphi$



# Логика деревьев вычислений (CTL)

**Пример:** рассмотрим такую CTL-интерпретацию  $\mathcal{I}$

(при переходе влево изменяется значение  $p$ , вправо — значение  $q$ ):



Справедливы следующие соотношения:

- ▶ в начале развития событий верно  $p$ , но события могут развиваться так, что  $p$  станет неверным

$$\mathcal{I}, \square \models p, \quad \mathcal{I}, \square \models \mathbf{EF}\neg p$$

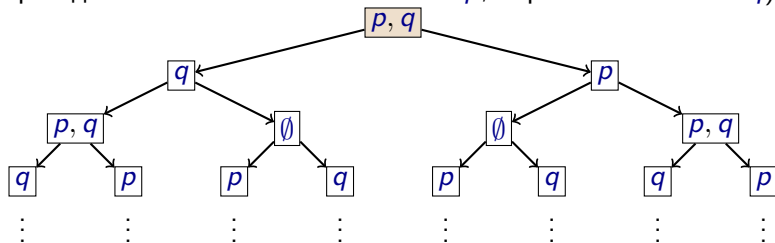
- ▶ есть вариант развития событий, при котором  $p$  всегда остаётся верным, но не для всех вариантов это так

$$\mathcal{I}, \square \models \mathbf{EG}p, \quad \mathcal{I}, \square \not\models \mathbf{AG}p$$

# Логика деревьев вычислений (CTL)

**Пример:** рассмотрим такую CTL-интерпретацию  $\mathcal{I}$

(при переходе влево изменяется значение  $p$ , вправо — значение  $q$ ):



Справедливы следующие соотношения:

- ▶ как бы ни развивались события, всегда есть способ в дальнейшем сделать  $p$  и  $q$  одновременно верными

$$\mathcal{I}, \blacksquare \models \mathbf{AGEF}(p \& q)$$

- ▶ утверждение “после возникновения события  $p$  обязательно рано или поздно возникает событие  $q$ ” неверно

$$\mathcal{I}, \blacksquare \not\models \mathbf{AG}(p \rightarrow \mathbf{AF}q)$$