Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 17

Проверка пустоты автомата Бюхи

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Общая схема автоматного алгоритма проверки моделей для LTL:

1. По модели Крипке M строится автомат A_M, распознающий $\mathrm{Tr}(M)$
2. По ltl-формуле φ строится автомат $A_{\neg\varphi}$, распознающий $\mathrm{Tr}(\neg\varphi)$
3. Строится пересечение $A_\cap$ автоматов A_M и $A_{\neg\varphi}$: автомат, распознающий $\mathrm{Tr}(M) \cap \mathrm{Tr}(\neg\varphi)$
4. Проверяется пустота автомата $A_\cap$: $\mathrm{Tr}(M) \cap \mathrm{Tr}(\neg\varphi) \stackrel{?}{=} \emptyset$
5. Выдаётся ответ: «да» $\Leftrightarrow$ автомат $A_\cap$ пуст

Автомат Бюхи A пуст, если им распознаётся пустой язык,
и непуст иначе

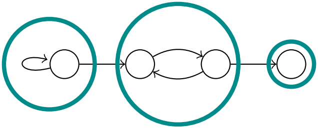
Для лучшего понимания теоремы,
сводящей проверку пустоты автомата Бюхи к графовым задачам,
полезно напомнить/ввести соответствующие понятия из теории графов

Вершина u ориентированного графа достижима из вершины v,
если в этом графе существует путь из v в u
(быть может, тривиальный, если $u = v$)

Ориентированный граф называется сильно связным,
если любые две его вершины достижимы друг из друга

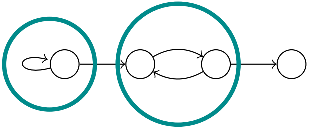
Компонента сильной связности (к.с.с.) ориентированного графа — это максимальный по включению вершин и дуг сильно связный подграф этого графа

Например, ниже в графе обведены окружностями все компоненты сильной связности:



Компонента сильной связности нетривиальна (н.к.с.с.), если в ней содержится хотя бы одна дуга

Например, ниже в графе обведены окружностями все нетривиальные компоненты сильной связности:



Теорема (о проверке пустоты автомата Бюхи)
Для любого автомата Бюхи A верно следующее: $L(A) \neq \emptyset \Leftrightarrow$ в A хотя бы из одного начального состояния достижима хотя бы одна н.к.с.с., содержащая хотя бы одно допускающее состояние

Доказательство

($\Leftarrow$) Если в A из начального состояния по пути $s_1 \to \dots \to s_k$ достижима н.к.с.с. с путём $s_k \to \pi \to s_k$ через допускающее состояние, то $s_1 \to \dots \to s_k(\to \pi \to s_k)^\infty$ — успешное вычисление A

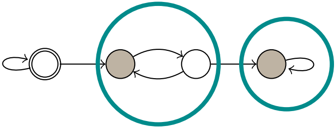
($\Rightarrow$) Если $L(A) \neq \emptyset$, то в A существует успешное вычисление ρ

По бесконечности и успешности, ρ содержит префикс вида $s_1 \to \dots \to s_k \to \pi \to s_k$ с допускающим состоянием в подпути $\pi \to s_k$

Тогда состояния подпути $\pi \to s_k$ входят в искомую н.к.с.с. ▼

Примеры

Следующий автомат Бюхи непуст
(н.к.с.с. с допускающим состоянием обведены кругами):



Следующий автомат Бюхи пуст
(не содержит н.к.с.с. с допускающим состоянием):

Поиск н.к.с.с. в ориентированном графе — это известная задача, для которой известны эффективные решающие алгоритмы, выходящие за рамки курса: «лобовой» с транзитивным замыканием, Косарайю, Тарьяна, стековый, ...